

No. 4-70

HAEFLIGER

(Travaux de Gramov)

HAEFLIGER ORSAY 70

Résumé: Gramov, Izvestia 1969

Applications stables des feuilletages dans les variétés.

E fibre C^∞
 $P \downarrow$
 M variété

$\mathcal{D}(M)$ = pseudo-groupe des difféomorphismes locaux de M

Hyp: $\exists$ une extension de ce pseudo-groupe au fibre E , i.e. une application

$$\mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(E) \quad \text{qui vérifie :}$$

$$f \mapsto \bar{f}$$

1) Si $f: U \rightarrow V$ diff's (U, V ouverts $\subset M$), alors

$$\bar{f}: \bar{P}'(U) \xrightarrow{\text{diff's}} \bar{P}'(V) \quad \text{avec des composantes commutatives}$$

2) Si $f = 1_U$, $\bar{f} = 1_{\bar{P}'(U)}$

3) $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f}$

Ex: $\mathbb{R}^m \times F$ avec $(x, y) \mapsto f(x), y$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{R}^m$$

2) si F muni d'une action de $GL(m; \mathbb{R})$, on prendra

$$(x, y) \mapsto (f(x), df(x)y)$$

$$2) \quad \begin{array}{c} E \\ \downarrow p \\ M \end{array}$$

uni d'une action
de $\mathcal{O}(M)$

Soit $E^2 =$ fibré des 2-jets de sections de E

L'action de $\mathcal{O}(M)$ s'étend à E^2

Soit $\psi(M) =$ ——— continues de E^2 , avec top. compacte ouverte.
Soit $\phi(M) =$ espace des sections C^∞ de E , avec la C^2 -topologie, compacte ouverte.

Soit E_0^2 une sous-fibré de E^2 ouvert, et invariant par l'action de $\mathcal{O}(M)$

$$\text{On a } \phi(M) \xrightarrow[\substack{\text{dérivée} \\ \text{d'ordre 2}}]{d_2} \psi(M)$$

Soit $\phi_0(M) =$ espace de $\phi(M)$ formé des sections dont le 2-jet appartient à E_0^2

Soit $\psi_0(M) =$ espace de $\psi(M)$ des sections de E_0^2

$$d_2: \phi_0(M) \rightarrow \psi_0(M)$$

Théorème Si M est ouverte (sans bord) et compacte, $d_2: \phi_0(M) \xrightarrow{d_2} \psi_0(M)$ est une équivalence d'homotopie faible (e.h.f.)

• Applications :

I - $X =$ variété différentiable

$E = M \times X$ avec action triviale de $\mathcal{O}(M)$

$\phi(M) = C^\infty(M, X)$ avec la C^2 -topologie.

$E^1 = J^1(M, X) =$ fibré $\text{Hom}(TM, TX)$

On prend $E_0^1 =$ 1-jets de rang ~~non~~ = dim ~~X~~

Alors $\phi_0(M) = \text{Submersifs}(M, X)$

$$\downarrow d_1$$

$$\psi_0(M) = \text{Epi}(TM, TX)$$

h.e. faible -

(th. de Phillips).

II. Remarque $E_0^1 = 1$ -jets de rang $\geq k$

Alors $\phi_0(M) = k$ -mersifs (M, X)

$$\downarrow d_1$$

$$\psi_0(M) = \text{Hom}_k(TM, TX)$$

(rang $\geq k$)

h.e. faible

III. Soit $\mathcal{F}^1$ un champ de p -plans sur X , (on note q la codim.) $\left(\begin{array}{c} TX \\ \pi \downarrow \\ N\mathcal{F}^1 \end{array} \right)$ le fibré normal au champ $\mathcal{F}^1$

~~Alors~~ $\phi_0(M) =$ applications de M dans X transverses à $\mathcal{F}^1$

h.e. faible $\downarrow d^1$
 $\psi_0(M) =$ homomorphismes de TM dans TX tels que leur composé avec $(\pi: TX \rightarrow N\mathcal{F}^1)$ est de rang q

$$\simeq \text{Epi}(TM, N\mathcal{F}^1)$$

$$\text{On note } \phi_0(M) = \left| \text{Tr}(M, \mathcal{F}^1) \xrightarrow[\text{h.e. faible}]{\pi \circ d} \text{Epi}(TM, N\mathcal{F}^1) \right|$$

IV. Fibre de $E_0^2 = J_0^2(\mathbb{R}^m, X)$. On choisit E_0^2 ,

on choisit $O \subset J_0^2(\mathbb{R}^m, X)$, ouvert, invariant par l'action de $\mathcal{D}(M)$,

(i.e. si $G_0^2 =$ gpe des $\underbrace{2\text{-jets de dérivées}}_{\text{en } O}$ de $\mathbb{R}^m$ fixant O ,
 O invariant par G_0^2)

4) Autres applications

I' $E = T^*M$ (cotangent) -

$\Phi(M) =$ espace des 1-formes ω sur M (C^1 topologie).

Supposons que $\dim M = 2n$; on s'intéresse aux ω tels que $(d\omega)^n \neq 0$ partout. ; ceci définit $\Phi_0(M)$.

~~$\Phi_0(M)$ est l'espace des sections de E~~

$E_0^1 =$ fibre de 1-jets de 1-formes ω tels que $(d\omega)^n \neq 0$.

On peut voir facilement que

$\Psi_0(M) \simeq$ espace des sections de la fibre associée
au fibré TM de fibre $GL(2n, \mathbb{R})/U(n)$

(espace de structures presque complexes sur M , i.e. espace
de structures symplectiques sur M , car le compact maximal
dans $Sp(2n)$ est $U(n)$ -

Donc $\exists$ telle forme $\omega \Leftrightarrow \exists$ structure presque complexe -

II' Si $\dim M = 2n+1$, on prend

$\Phi_0(M) =$ 1-formes ω de rang maximum (structures de contact)

i.e. $\omega \wedge (d\omega)^n \neq 0$ partout.

On voit que $\Psi_0(M) \simeq$ espace de sections du fibré
associé à TM de fibre $GL(2n+1, \mathbb{R})$

($\Leftrightarrow$ le gr. struct de TM peut être réduit à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U(n) \end{pmatrix}$$

($\Rightarrow \omega$ partout $\neq 0$
 $\Rightarrow$ dim. de $2n$ -plans
sur lequel $d\omega$ définit une
structure symplectique
Donc $TM =$ trivial
+ fibre avec str. sympl
ou trivial + espace complexe -

Rq: ? $\exists$ structure de contact sur $S^2 \times S^1$?
la condition est vérifiée car $S^2 \times S^1$ //able -

(5)

* Encore d'autres applications:

I" $E =$ fibre des métriques riemanniennes sur TM

Prenons $E_0^2 =$ fibre des 2-jets de métriques riemanniennes de courbure ^(sectionnelle) positive.

E_0^2 a une fibre contractile -

$\Rightarrow$ Sur toute variété ouverte, $\exists$ métrique riemannienne avec courbure sectionnelle partout > 0 (resp. < 0)

h)

13.4.70
Haefliger.

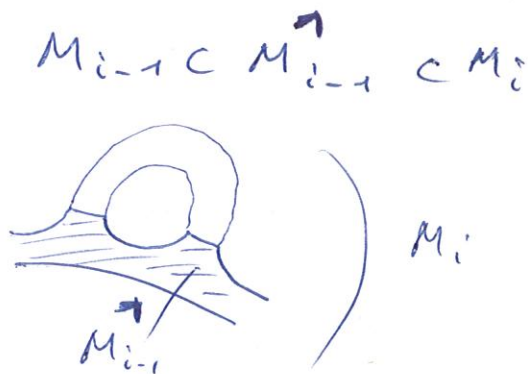
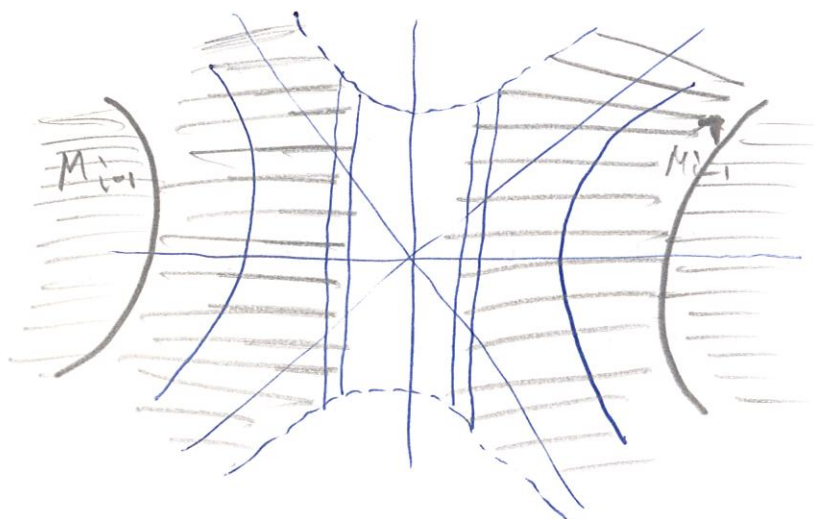
Démonstration :

(7)

I. PLAN

possible au Mouset
 Construire une fonction de Morse $f: M \rightarrow [0, \infty[$ propre
 avec valeurs critiques distinctes $c_1 < c_2 < \dots < \infty$, et
 indices critiques $< m (= \dim M)$

Notations : Soit $c_i < d_i < c_{i+1}$, $M_i = \overbrace{f^{-1}([0, d_i])}^{\text{compacte}}$



— Prop. 1 : $\Phi_0(D^m) \xrightarrow{d^2} \Psi_0(D^m)$ est une h.e. (faible).

— Prop. 2 :

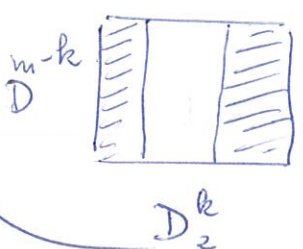
$$\begin{array}{ccc} \Phi_0(M_i^7) & \longrightarrow & \Phi_0(M_i) \\ \downarrow d^2 & & \downarrow d^2 \\ \Psi_0(M_i^7) & \longrightarrow & \Psi_0(M_i) \end{array}$$

Les fibres horizontales sont des h.e. faibles et des
 fibrations de Serre.

— Prop. 3 : voir dernière page & notations :

~~XXXXXXXX~~ $\Phi_0(A^k) \rightarrow \Phi_0(B^k)$ est une fibration de Serre pour $\mathbb{R} < m$
 $\Psi_0(A^k) \rightarrow \Psi_0(B^k)$ est ————— (sans condition).

8) ~~Prop 3~~: Notations: $A^k = D_2^k \times D^{m-k}$, $D_2^k = \{x \in \mathbb{R}^k, \|x\| \leq 2\}$
 $B^k = D_{[1,2]}^k \times D^{m-k}$, $D_{[1,2]}^k = \{x \in \mathbb{R}^k, 1 \leq \|x\| \leq 2\}$



• Dém. du Théorème:

- Lemme:
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\bar{f}} & E' \\ p \downarrow & \bar{f} & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{\quad} & B \end{array}$$
 p, p' fibrations de Serre
 $(\bar{f}, \bar{p})$ morphisme de fibres -
 f h.e. faible, $\bar{f}$ h.e. faible

~~$\bar{f}$~~ $\Rightarrow \bar{p}'(x) \xrightarrow{\bar{f}} p'^{-1}(x)$ h.e. faible,
 et $f + \bar{f}|_{\bar{p}'(x)}$ h.e. faible $\Rightarrow \bar{f}$ h.e. faible.

~~Lemme~~

Hypothèse de récurrence: Le th. est supposé vrai pour les
 ~~M~~ valeurs M un nombre fini d'indices $< k$
 (vrai pour $k=1$) (finie) $(k < m)$

Soit $V = \bar{M} \cup A^k$

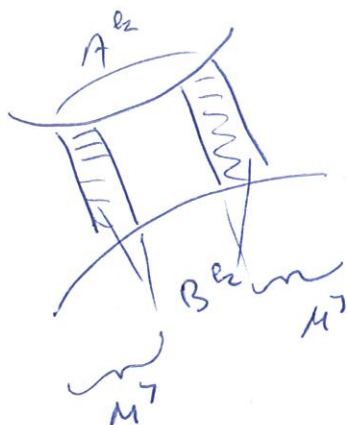
On considère les diagrammes:

$$\begin{array}{ccc} \Phi_0(A_k) & \xrightarrow{d^2} & \Psi_0(A_k) \\ \text{fibration} \downarrow & \text{h.e. faible} & \downarrow \text{fibration} \\ \Phi_0(B_k) & \xrightarrow{d^2} & \Psi_0(B_k) \end{array} \Rightarrow d^2 \text{ h.e. faible sur les fibres -}$$

(Prop 3) (Prop 3)

h.e. faible

hyp. de récurrence



$$\Phi_0(v) \xrightarrow{d^2} \Psi_0(v)$$

fibration
(Prop 3) ↓

fibration
(Prop 3) ↓

$$\Phi_0(M^1) \xrightarrow{d^2} \Psi_0(M^1)$$

h.e. faible
top. de dimension
(et prop. 2)

Les fibres sont ~~uniquement~~ les fibres du diagramme précédent $\Rightarrow d^2$ h.e. faible sur les fibres.

$\Rightarrow d^2$ h.e. faible sur l'espace total cgfd

$\Rightarrow \Phi_0(M_i) \rightarrow \Psi_0(M_i)$ h.e. faible pour tout i (Upritz d'auis),
on a besoin, pour passer à la limite, du

Lemme:

$$\rightarrow A_{i+1} \xrightarrow{p_{i+1}} A_i \rightarrow$$

↓ d_{i+1}

↓ d_i

$$\rightarrow B_{i+1} \xrightarrow{q_{i+1}} B_i \rightarrow$$

Les flèches horizontales sont des
transformations de Serre.
(p_i, q_i)

Les d_i sont des h.e. faibles.

$\varprojlim$
top. c.o.

$$\Phi_0(M) = \varprojlim \Phi_0(M_i)$$

$$\begin{matrix} A = \varprojlim A_i \\ d \downarrow \\ B = \varprojlim B_i \end{matrix}$$

d est h.e. faible

10) Démonstration de la proposition 1 :

$$E = D^m \times X \quad \phi(D^m) \equiv C^2(D^m, X)$$

$$E_o^r = D^m \times X_o^r, \text{ où } X_o^r = \text{ouvert voisinant dans } J_o^r(\mathbb{R}^m, X)$$

Il est clair que $\psi_o(D^m) \xrightarrow[\text{jet à l'origine}]{\text{réseau à l'origine}} \psi_o(o)$ est une h.e. - ~~faible~~

Il suffit de démontrer que

$$\phi_o(D^m) \xrightarrow[\text{jet à l'origine}]{\text{jet à l'origine}} \psi_o(o) \text{ est une h.e. faible.}$$

Surjectivité sur le Π :

Soit $S^i \xrightarrow{f} \psi_o(o)$ une application continue.

on étend ce jet,

en plongeant $X \subset \mathbb{R}^N$, N grand.

On prend un voisinage $W \supset X$, avec une rétraction différentiable $\pi: W \rightarrow X$

$$J_o^r(D^m, X) \subset J_o^r(D^m, \mathbb{R}^N)$$

Il existe une application $F: S^i \times D^m \rightarrow \mathbb{R}^N$ telle que

~~est~~ ~~et~~ 1) $F(s, x)$ est différentiable en x et

~~est~~ $d^2 F(s, x)$ continue en s et x .

2) $d^2 F(s, o) = f(s)$ (prendre une extension polynomiale).

$\exists$ voisinage V de 0 dans D^m , tel que

$$F(S^i \times V) \subset W$$

Def: $F': S' \times V \rightarrow X$ par

Maefleje (-11)
13.4.70

$$F' = \pi \circ (F|_{S' \times V}) \quad \phi_0(u) \subset \phi(V)$$

On a aussi étendu le jet: $S' \xrightarrow{g} \psi_0(0)$

Il existe un voisinage ouvert de 0: $0 \in U \subset V$ tel que

$$d^2(F'|_{S' \times U}) \subset E_0^2 \quad (\text{car } E_0^2 \text{ ouvert})$$

On utilise maintenant l'immersion par différenciation



On utilise h , ~~fixant un~~ fixant un voisinage de l'origine, $D^m \rightarrow U$

on a $F': S' \rightarrow \phi_0(U)$

on en déduit ~~$g \in P_0$~~ $g(s, x) = \bar{h}^{-1} F(s, hx)$

qui envoie S' dans $\phi_0(D^m)$ c'est-à-dire

Injectivité sur le π_1 : idem

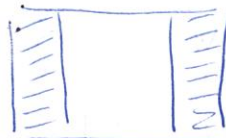
12) 14.4.20 Haefliger IV

§ 1.8 $\left\{ \begin{array}{l} A = D_2^k \times D^{m-k} \\ B = D_{[1,2]}^k \times D^{m-k} \end{array} \right.$

$$D_2^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leq 2\}$$

$$D_{[a,b]}^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid a \leq \|x\| \leq b\}$$

$$S_a = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| = a\}$$



Formidable car n'utilise pas la stabilité de immersions (permissible de factoriser imm. proche par difféo). $\Rightarrow$ un vrai jeu de clones d'opérateurs qui ne font pas stable.

Prop 3 : $\phi_0(A) \rightarrow \phi_0(B)$ est une fibration de Serre si $\boxed{k \leq m}$

P polyèdre fini

$$I \times 0 \xrightarrow{g_0} \phi_0(A)$$

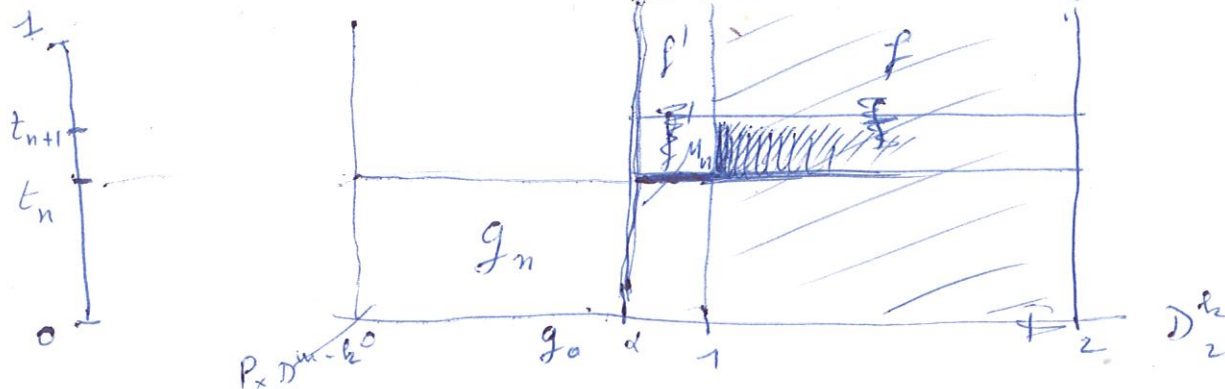
$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \xrightarrow{g_0} & \downarrow \\ P \times I & \xrightarrow{f} & \phi_0(B) \end{array}$$

~~2.1.1~~ f se représente encore par

$$f : P \times I \times D_{[1,2]}^k \times D^{m-k} \rightarrow X \text{ telle que}$$

admissible (par diff) Pour (p, t) fixé, $f(p, t, x, y)$ 2-différentiable en x et y
 $d^2 f(_)$ continue des bords ∂ standards,

et $\in E_0^2$



On a de même

(13)

$$g_0: P \times O \times D_2^k \times D^{m-k} \longrightarrow X \quad \text{admissible}$$

1) On étend f en f' sur un voisinage : (f' admissible) définie sur $P \times I^{\text{vois}} \times D[\alpha, 2] \times D^{m-k}$, $0 < \alpha < 1$ (au recolle des extensions local)
 $(f' = g_0 \text{ sur } P \times O \times D_2^k \times D^{m-k})$

2) $\exists$ une suite strictement croissante $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$ et une suite d'opérations

admissibles M_n , $0 \leq n \leq r-1$ définies sur

$$P \times [t_n, t_{n+1}] \times \text{vois } D[\alpha, 2] \times D^{m-k}, \text{ telles que :}$$

$$M_n(p, t_n, x, y) = f'(p, t_n, x, y)$$

$$M_n(p, t, x, y) = f'(p, t, x, y), \text{ pour } x \in \text{vois } D[\alpha, 2]$$

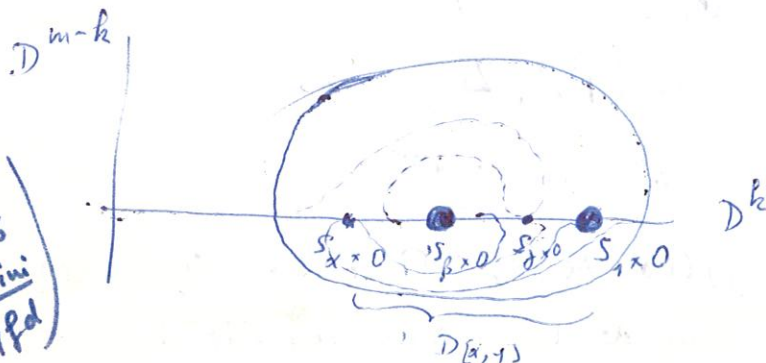
$$M_n(p, t, x, y) = M_n(p, t_n, x, y), \text{ pour } x \in \text{vois } S^x$$

C'est la condition E_2^2 ouvert qui permet de faire ceci :

(id $\xrightarrow{f'}$ I)
 au regard de l'ajout g_0 E_2 ouvert $\Rightarrow$ encore admissible
 I compact $\Rightarrow \exists$ telle suite.

On suppose que g_n est construite sur $P \times [0, t_n] \times D_2^k \times D^{m-k}$
 avec $g_n = f'$ au vois de $D[\beta, 2] \times D^{m-k}$, $g_n = g_0$ sur $t=0$

* 3) Soit U un voisinage de $D[\alpha, 1] \times O$, où M_n et f' sont définies



on commence par obtenir une suite finie de M_n (possible car on ne leur demande pas de se recoller, et on utilise le recollement de f')

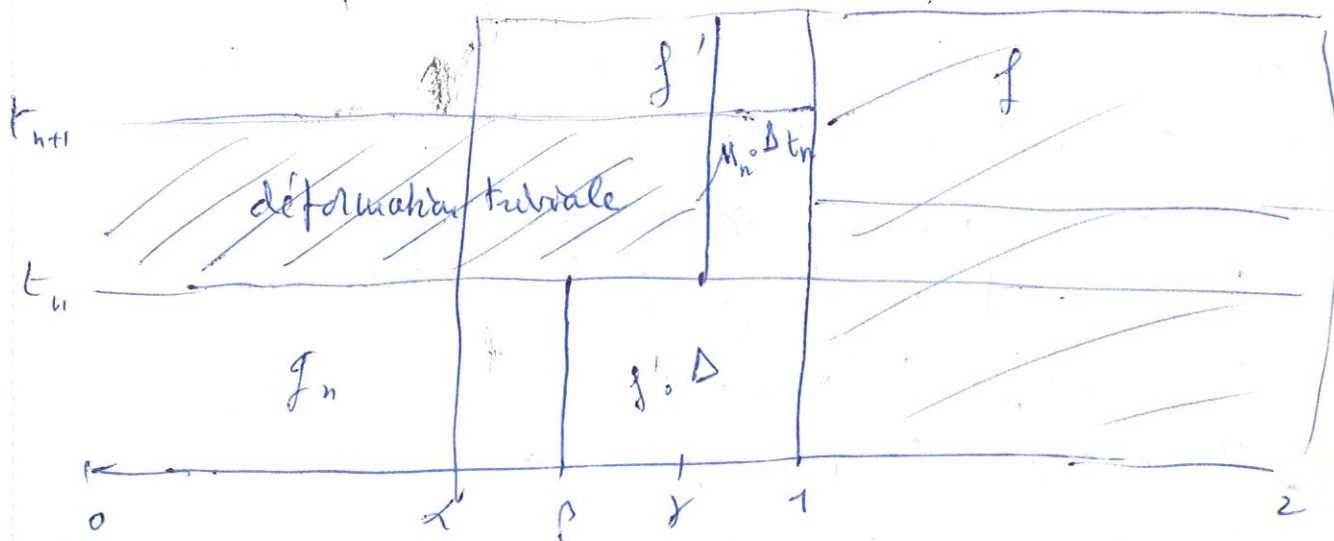
astuce : on utilise le recollement de f' et g_0 sur des morceaux de + en + petits (mais nbr fini) $\Rightarrow$ c.p.d.

14) Soit $\beta < \delta < 1$. On construit une isotopie $\Delta_t: D^{\frac{k}{2}} \times D^{m-k} \rightarrow D^{\frac{k}{2}} \times D^{m-k}$ ($0 \leq t \leq t_n$) telle que:

1) $\Delta_t = \text{id}$ (en dehors de U)
 — sur des voisinages de $S_\beta \times 0$ et $S_1 \times 0$
 — pour $t=0$

2) $\Delta_{t_n}(S_\delta \times 0) = S_\beta \times 0$
 $\Delta_{t_n}(S_\gamma \times 0) = S_\delta \times 0$

existe car $m-k \geq 0$ strict



On va définir g_{n+1} sur $P_\alpha[0, t_{n+1}] \times \text{vois.} \left(D^{\frac{k}{2}}_{[\beta, 2]} \times D^{m-k} \right)$
 Zaire + fine! $\left(\cup D^{\frac{k}{2}}_2 \times 0 \right)$
 à une distance

- Sur $P_\alpha[0, t_n] \times D^{\frac{k}{2}}_{[\beta, 2]} \times D^{m-k}$, $g_{n+1}(p, t, x, y) = f'(p, t, \Delta_t(x, y))$
- Sur $P_\alpha[0, t_n] \times D^{\frac{k}{2}}_\beta \times D^{m-k}$, $g_{n+1} = g_n$ (reste admissible car $\in \text{travaux par } D(m)$)

On vérifie que ça se recolle au vois. de la sphère S_β .

- Sur $P_\alpha[t_n, t_{n+1}] \times D^{\frac{k}{2}}_{[\delta, 2]} \times D^{m-k}$,

$$g_{n+1}(p, t, x, y) = \mu_n(p, t, \Delta_{t_n}(x, y))$$

pour $t=t_n$, $\mu_n = f' \Rightarrow$ ça se recolle.

Remarquons que si $(x, y) \in \text{vois. de } S_\gamma \times 0$, Δ_{t_n} envoie sur $S_\delta \times 0$,
 car μ_n est indépendant de $t \Rightarrow$ on peut étendre - Cqfd -