

Astérisque

LAURENT SIEBENMANN

La conjecture de Poincaré topologique en dimension 4

Astérisque, tome 92-93 (1982), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 588, p. 219-248

[<http://www.numdam.org/item?id=SB_1981-1982__24__219_0>](http://www.numdam.org/item?id=SB_1981-1982__24__219_0)

© Société mathématique de France, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA CONJECTURE DE POINCARÉ TOPOLOGIQUE EN DIMENSION 4

[d'après M.H. Freedman]

par Laurent SIEBENMANN

A la fin de l'été 1981, à San Diego, Michael H. Freedman a réussi à démontrer que toute 4-variété lisse (de classe C^∞) et métrisable M^4 , qui a le type d'homotopie de la 4-sphère $S^4 = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid |x| = 1\}$, est nécessairement homéomorphe à S^4 , ce qui s'écrit succinctement à l'aide de symboles : M^4 lisse et $\simeq S^4 \Rightarrow M^4 \approx S^4$. Mon but principal est d'exposer sa preuve. (Dans cet exposé, toute variété sera métrisable et de dimension $< \infty$.) On ne sait pas encore si M^4 est toujours difféomorphe (\cong) à S^4 , i.e. si M^4 lisse et $\simeq S^4 \Rightarrow M^4 \cong S^4$. Par contre, Freedman sait démontrer pour toute 4-variété topologique M^4 (sans structure lisse donnée) que $M^4 \simeq S^4 \Rightarrow M^4 \approx S^4$ (voir plus loin).

H. Poincaré [Poi] a surtout signalé la conjecture selon laquelle, pour toute M^n variété lisse, $M^n \simeq S^n \Rightarrow M^n \cong S^n$. Le premier cas non trivial, la dimension $n = 3$, reste, pour autant que je sache, une conjecture encore ouverte aujourd'hui, malgré des efforts incessants d'innombrables mathématiciens. Un détail amusant est que les contre-exemples de J.H.C Whitehead [Wh] à sa propre preuve erronée de cette conjecture joueront un rôle capital dans cet exposé (dès § 2).

J. Milnor a découvert en 1956 [Mi] des variétés lisses M^7 qui sont $\simeq S^7$ et même $\approx S^7$, mais $\not\cong S^7$ (de telles "sphères exotiques" existent en dimension ≥ 7 selon [KeM]). Ainsi la conjecture de Poincaré ci-dessus a dû être révisée pour les dimensions $n \geq 7$.

En 1959, S. Smale [Sm] a établi sa "théorie des anses" pour démontrer que, pour M^n lisse, $n \geq 6$, $M^n \simeq S^n \Rightarrow M^n \approx S^n$. Son résultat technique, le théorème du h -cobordisme (voir plus loin) est plus précis ; en le combinant avec les techniques de chirurgie de Milnor, Kervaire et Milnor [KeM] ont établi pour $n = 6$ et 5 la version originale de la conjecture de Poincaré. En 1965, M.H.A. Newman a su adapter la méthode "d'engouffrement" de J. Stallings pour prouver la version purement topologique : M^n variété topologique $\simeq S^n \Rightarrow M^n \approx S^n$ (depuis 1969, les méthodes de Smale s'adaptent aussi, cf. [KiS]). En résumé, disons que la conjecture de Poincaré est résolue pour les dimensions ≥ 5 , pas du tout résolue (! ?) en dimension 3, et dorénavant partiellement résolue en dimension 4.

J'esquisse maintenant la preuve de Freedman ; elle comporte la classification topologique des 4-variétés lisses, closes et simplement connexes, et bien d'autres résultats de première importance. Soient V et V' deux telles variétés (disjointes). On suppose qu'il existe un isomorphisme $\theta : H_2 V \rightarrow H_2 V'$ entre leurs groupes d'homologie en dimension 2 qui respecte les formes bilinéaires d'intersection des 2-cycles ($V \simeq S^4 \Leftrightarrow H_2(V) = 0$).

THÉORÈME 1. Dans cette situation, θ est réalisé par un homéomorphisme $V \rightarrow V'$ (on conjecture encore qu'il l'est par un difféomorphisme).

Preuve. Il n'est pas difficile de réaliser θ par une équivalence d'homotopie $g : V \rightarrow V'$ [MiH]. La théorie de la chirurgie (voir [Wa] [Br]) offre ensuite une 5-variété compacte W de bord $\partial W = V \amalg V'$ telle que les inclusions $V \hookrightarrow W \hookrightarrow V'$ sont des équivalences d'homotopie, et telle que la restriction $r|_V : V \rightarrow V'$ d'une (quelconque) rétraction $r : W \rightarrow V'$ est homotope à g . La triade compacte $(W; V, V')$ est appelée un h-cobordisme. La théorie des anses de Smale essaie d'améliorer une fonction générique (de Morse) $f : (W; V, V') \rightarrow (I; 0, 1)$, $I = [0, 1]$, pour arriver à une situation où f n'a aucun point critique, i.e. f est une submersion lisse; W est alors un fibré lisse sur I (remarque d'Ehresmann), d'où $W \cong V \times I$. Nous allons trouver plutôt une submersion topologique f qui assure que W est un fibré topologique sur I (voir [Si₃, §6]), d'où $W \approx V \times I$. Ainsi, on aura :

THÉORÈME 2. Soit $(W^5; V, V')$ un h-cobordisme lisse compact et simplement connexe avec $\partial W^5 = V \amalg V'$ (et $V \simeq W \simeq V'$ par inclusions). Alors, $W \approx V \times [0, 1]$.

Pour $n \geq 6$ à la place de 5, le théorème du h-cobordisme de Smale affirme mieux : $W \cong V \times [0, 1]$. En dimension 5, ses méthodes s'appliquent mais laissent, pour prouver $W \cong V \times [0, 1]$, le

PROBLÈME RÉSIDUEL LISSE (non résolu). Soient $S = \amalg S_i$ et $S' = \amalg S'_i$,

$i = 1, \dots, k$, deux familles de 2-sphères disjointes plongées dans une 4-variété simplement connexe M^4 (en fait $f^{-1}(\text{point})$) de façon que les nombres d'intersection homologique $S_i \cdot S'_j$ sont 0 pour $i \neq j$ et ± 1 pour $i = j$. Peut-on réduire $S \cap S'$ à k points d'intersection (lisse et transverse) par une isotopie lisse de S dans M^4 ?

Similairement, pour assurer seulement $W^5 \approx V \times [0, 1]$, on constate (consulter l'exposition dans [Mi₂] et [KiS, III]) qu'il suffit de résoudre le

PROBLÈME RÉSIDUEL TOPOLOGIQUE (résolu ici). Avec les données du problème lisse, réduire $S \cap S'$ à k points par une isotopie topologique de S dans M , qui est donnée par une isotopie ambiante h_t , $1 \leq t \leq 1$, de $\text{id}|_M$ fixant un voisinage de k points de $S \cap S'$.

Whitney a introduit une méthode naturelle pour résoudre ces problèmes. Dans le modèle $(\mathbb{R}^2; A, A') : \text{---} \cup \text{---}$ (c'est une droite A coupant une parabole A' en 2 points), on peut dégager A de A' par une isotopie lisse à support compact (i.e. fixant un voisinage l'infini); on élimine ainsi les 2 points d'intersection : $\text{---} \cup \text{---}$. On déduit que dans le modèle de Whitney stabilisé $(\mathbb{R}^4; A_+, A'_+) = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; A \times 0 \times \mathbb{R}^1, A' \times \mathbb{R}^1 \times 0)$, il y a une isotopie à support compact qui dégage le plan A_+ du plan A'_+ en supprimant les deux points d'intersection transverse de A_+ et A'_+ .

Nous appelons procédé de Whitney lisse [ou topologique] un plongement lisse [ou topologique] d'une somme disjointe d'exemplaires du modèle $(\mathbb{R}^4; A_+, A'_+)$ dont l'image contient $S \cap S' - (k\text{-points})$. Un tel procédé donnerait visiblement l'isotopie exigée pour résoudre le problème résiduel lisse [respectivement topologique].

CONJECTURE DE POINCARÉ

THÉORÈME 3 (A. Casson et M. Freedman). Dans ce contexte, après une isotopie lisse préalable de S dans M^4 (ajoutant des points d'intersection avec S' par une démarche inverse à celle de Whitney, loin de $S \cap S'$), ce procédé topologique de Whitney devient possible.

La première étape de la preuve (1973-76) est due à Andrew Casson. Soit B un 2-disque lisse et compact dans la composante bornée de $R^2 - (A \cup A')$. Le produit $B \times R^2$ est une 2-anse ouverte plongée (comme sous-variété fermée) dans le modèle de Whitney, et disjointe de $A_+ \cup A'_+$. Dans $B \times R^2$, Casson a construit des ouverts curieux $H = B \times R^2 - \Omega$ de bord $\partial H = \partial B \times R^2$, qu'on appelle des anses ouvertes de Casson (voir § 2 pour la définition précise). On est encore incapable de décider si toute H est $\cong B \times R^2$ ou si contrairement aucune H n'est $\cong B \times R^2$.

En remplaçant $B \times R^2$ par $H \subset B \times R^2$ dans le modèle de Whitney $(R^4; A_+, A'_+)$, on a un ouvert $(R^4 - \Omega; A_+, A'_+)$ qu'on appelle un modèle de Whitney-Casson. Par un processus infini tout à fait remarquable, A. Casson a démontré :

THÉORÈME DE CASSON ([CaG], cf. [Man]). Après une isotopie lisse préalable de S dans M^4 , on peut trouver dans $(M^4; S, S')$ des modèles disjoints de Whitney-Casson plongés de façon lisse, de sorte que ces modèles contiennent tous les points de $S \cap S'$ sauf k .

Le théorème de Casson et Freedman découle maintenant du théorème que je vais exposer.

THÉORÈME DE FREEDMAN 4 (1981). Toute anse ouverte de Casson est homéomorphe à $B^2 \times R^2$. Donc $(R^4; A_+, A'_+) \approx (R^4 - \Omega; A_+, A'_+)$.

La version non-compacte du théorème 2 s'avère importante.

THÉORÈME 2*. Soit $(W^5; V, V')$ avec $\partial W = V \amalg V'$ un h-cobordisme lisse propre et simplement connexe qui a un nombre fini de bouts et un π_1 -système trivial à chaque bout. Alors $W \approx V \times [0, 1]$.

La preuve (difficile) proposée par Freedman (octobre 1981) imite la preuve du théorème du s-cobordisme propre esquissée dans $[Si_1]$, tout en évitant de faire successivement deux procédés de Whitney, vue la perte de différentiabilité occasionnée par le théorème 3.

Il en découle (cf. $[Fr_1]$ $[Si_4]$) la classification topologique des variétés topologiques closes et simplement connexes qui admettent (est-ce inévitable ?) une structure lisse sur le complément d'un point. Elles se classifient par la forme d'intersection sur H_2 jointe à l'obstruction au lissage κ de Kirby-Siebenmann $[KiS]$; toute forme unimodulaire sur \mathbb{Z} est réalisée ainsi que tout $\kappa \in \mathbb{Z}/2$, sauf pour les formes paires, où $\kappa = \text{signature}/8 \in \mathbb{Z}/2$. Toute variété topologique $V^4 \simeq S^4$ est dans cette classe, car $V^4 - (\text{point})$ est $\simeq (\text{point})$ et $V^4 - (\text{point})$ s'immerge donc dans R^4 (cf. $[KiS, V]$).

Il en découle aussi (voir $[Fr_1]$ $[Si_4]$) que toute variété lisse V^3 telle que $H_*(V^3) = H_*(S^3)$ est le bord d'une 4-variété topologique contractile W^4 .

Un Reportage: Mike Freedman a annoncé sa preuve de la conjecture de Poincaré topologique en août 1981 à une conférence de l'A.M.S. à l'Université de Californie à San Diego, où D. Sullivan faisait une série de conférences sur le théorème d'hyperbolisation de W. Thurston. Son argument était éblouissant, mais pas encore totalement étanche. Un peloton de connaisseurs a alors formulé quelques objections qui ont fait surgir l'énoncé du théorème d'approximation 5.1. Or, Freedman avait déjà dans l'oeuf son astuce de réplication

et, en quelques jours, il en a fait naître une preuve formelle imposante. Entretemps, R.D. Edwards avait trouvé une faille dans les arguments de rétrécissement (§ 4) et, en grand expert de cette méthode, a réparé cette faille avant même de l'avoir signalée (je crois qu'il a introduit en particulier les arguments de rétrécissement relatif).

A la fin du mois d'octobre 1981, Freedman a exposé les détails de sa preuve, avec charme et patience, à une conférence spéciale à l'Université de Texas à Austin (l'école de R.L. Moore) devant un auditoire de spécialistes dont, à la place d'honneur, A. Casson et R.H. Bing, créateurs de deux théories essentielles à la preuve.

Cet exposé relate la preuve donnée au Texas, avec les améliorations de détail racontées en coulisse. Déjà en septembre 1981, R. Ancel [Anc] avait clarifié et amélioré les complexités administratives du théorème d'approximation 5.1. En particulier, il a pu alléger une hypothèse de Freedman exigeant que les préimages des points singuliers constituent une décomposition évanescence (= "null"), en signalant (voir 5.7) que $S(f)$ dénombrable ou de "dimension" 0 [Ed₁] suffit. J. Walsh a contribué à quelques simplifications des arguments de rétrécissement¹ (fin du § 4). W. Eaton m'a suggéré les 4-boules qui aident à comprendre les rétrécissements relatifs (4.8, 4.10). J'ai proposé la co-ordination globale de l'anse ouverte de Casson (il s'agissait initialement d'y plonger une peau d'anse).

Ma rédaction (janvier 1982) ne semble rien changer d'essentiel à mes souvenirs du Texas. Seule ma construction des 2-disques correctifs (les $D(\alpha)$ de § 3.9) en dévie, probablement pour des raisons de goût. Je dois à Alexis Marin des critiques perspicaces et fraternelles.

§ 1. - TERMINOLOGIE (adoptée sauf indications contraires).

Les espaces admettent tous une métrique, notée génériquement d . Les applications sont toutes continues. Le support d'une application $f: X \rightarrow X$ est l'adhérence de $\{x \in X \mid f(x) \neq x\}$; le support d'une homotopie, ou isotopie $f_t: X \rightarrow X$, $0 \leq t \leq 1$, est l'adhérence de $\{x \in X \mid f_t(x) \neq x, \exists t \in [0, 1]\}$. Pour un sous-ensemble A , on définit l'adhérence \bar{A} , l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ et la frontière ∂A , toujours par rapport à l'espace ambiant sous-entendu (le plus grand en vue). Si A est une variété, il faut souvent distinguer $\overset{\circ}{A}$ de l'intérieur formel $\text{int} A$ et ∂A du bord formel ∂A . Une décomposition \mathfrak{D} d'un espace X sera une collection de compacts disjoints dans X qui est "usc", i.e. semi-continu supérieurement; l'espace quotient X/\mathfrak{D} est obtenu en identifiant en un point tout élément de \mathfrak{D} (voir [MV] pour une métrique); l'application quotient $X \rightarrow X/\mathfrak{D}$ naturelle est fermée, ce qui équivaut exactement à la propriété "usc". L'ensemble des composantes connexes d'un espace A est noté $\pi_0(A)$. Si A est un compact, $\pi_0 A$ est en même temps une décomposition de A pour laquelle le quotient $A/\pi_0 A$ est un compact de dimension 0 (totalement discontinu), qui s'identifie comme ensemble à $\pi_0 A$. Si $A \subset X$, $\pi_0 A$ donne une décomposition de X dont l'espace quotient est noté $X/\pi_0 A$. La compactification par bouts apparaît au § 2.

Les variétés et sous-variétés mentionnées seront (sauf indications contraires) lisses. Quant aux variétés, nous adoptons les conventions usuelles $[KiS, I]$; en particulier, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ avec la distance euclidienne $d(x, y) = |x - y|$; $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$; $I = [0, 1]$. Un disque multiple est une somme disjointe finie de disques (chacun $\cong B^2$). Similairement, pour anse multiple, etc. Le symbole \cong indique difféomorphisme; \simeq indique équivalence d'homotopie; et \approx indique homéomorphisme.

§ 2. - LES ANSES DE CASSON ET LA MITOSE DE FREEDMAN.

Nous utiliserons deux exemplaires B^2 , D^2 du 2-disque lisse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

La 2-anse standard est $(B^2, \partial B^2) \times D^2$; sa bande d'attachement ∂_- est $(\partial B^2) \times D^2$; sa peau ∂_+ est $B^2 \times \partial D^2$; son âme est $B^2 \times 0$.

Une 2-anse est un couple $(H^4, \partial_- H^4)$ qui est difféomorphe à $(B^2 \times D^2, \partial_-) = (B^2, \partial B^2) \times D^2$. Une 2-anse ouverte est une variété qui est difféomorphe à $B^2 \times \text{int} D^2 = B^2 \times \overset{\circ}{D}^2$.

Pour une 2-anse (éventuellement ouverte), la bande d'attachement, la peau, une âme, etc... , se définissent par un isomorphisme avec l'anse standard (éventuellement ouverte).

Dans cet exposé, nous pouvons nous permettre d'omettre l'épithète "2-" ; les anses d'indice $\neq 2$ n'apparaissent guère. Aussi, on écrit $\overset{\circ}{D}^2$ à la place légitime de $\text{int} D^2$.

Un défaut X dans une anse $(H^4, \partial_- H)$ est une sous-variété compacte X de $H^4 - \partial_- H$ telle que :



(i) $(X, X \cap \partial_+ H)$ est une anse, où $\partial_+ H$ est la peau de l'anse $(H, \partial_- H)$,

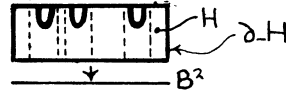
(ii) $(\partial_+ H, X \cap \partial_+ H)$ est (degré ± 1) difféomorphe au couple de Whitehead $(B^2 \times S^1, i(B^2 \times S^1))$



illustré dans cette figure :

(iii) Dans la 4-boule H^4 (avec ses arêtes arrondies), l'âme A^2 de l'anse $(X, X \cap \partial_+ H)$ est un 2-disque non noué, c'est-à-dire $(H^4, A^2) \simeq (B^4, B^2)$.

Un défaut multiple X dans une anse $(H^4, \partial_- H^4)$ est une somme finie et disjointe $\bigsqcup_i X(i) = X$ de ≥ 1 défauts $X(i)$, qui, pour une identification convenable $(H^4, \partial_- H^4) \simeq (B^2, \partial B^2) \times D^2$, se projettent vers B^2 dans autant de disques disjoints dans $\text{int} B^2$.



Une anse multiple $(H^4, \partial_- H^4)$ est une somme finie d'anses disjointes ; un défaut multiple $X \subset H^4$ dans une anse multiple est un compact qui donne par intersection un défaut multiple dans chacune de ces anses. Pour ces données, on a :

LEMME 2.0. La triade $(H^4 - \overset{\circ}{X} ; \partial_- H, \delta X)$ détermine H^4 et X en ce sens : si X' est un défaut multiple dans une anse $(H', \partial_- H')$ et que $\theta : (H - \overset{\circ}{X} ; \partial_- H, \delta X) \rightarrow (H' - \overset{\circ}{X}' ; \partial_- H', \delta X')$ est un difféomorphisme, il existe toujours un difféomorphisme $\epsilon : H \rightarrow H'$ qui prolonge θ .

Indication de preuve (voir [CaG]). Si on attache une anse multiple $(X', \partial_- X')$ à $H - \overset{\circ}{X}$ le long de la frontière δX de façon qu'il n'existe aucune extension de θ à $\Theta : H \simeq (H - \overset{\circ}{X}) \cup X' = H'$, on constate que $(\partial H', \partial_- H) \simeq (S^3, \text{tore solide})$ est un noeud non trivial ; en effet, une somme connexe de k noeuds non triviaux, $1 \leq k \leq \# \pi_0(X)$, de la forme :



Un défaut résiduel Ω dans une anse $(H^4, \partial_- H^4)$ est l'intersection d'une suite $X_1 \supset \overset{\circ}{X}_1 \supset X_2 \supset \overset{\circ}{X}_2 \supset X_3 \supset \overset{\circ}{X}_3 \supset \dots$ de sous-variétés compactes de $H^4 - \partial_- H^4$ telles que, pour tout k , $(X_k, \delta X_k)$ est une anse multiple dans laquelle X_{k+1} est un défaut multiple. La suite $X_1 \supset X_2 \supset \dots$ est appelée une gigogne de défauts dans $(H, \partial_- H)$.



Une anse de Casson est un couple $(H_\infty^4, \partial_- H_\infty^4)$ tel qu'il existe une anse $(H, \partial_- H)$ avec un défaut résiduel $\Omega \subset H$ et un plongement ouvert lisse $i_\infty : H_\infty \rightarrow H$ d'image $H - \Omega$, qui induit un isomorphisme $i_\infty| : \partial_- H_\infty \rightarrow \partial_- H$. En d'autres termes, $(H_\infty, \partial_- H_\infty) \cong (H - \Omega, \partial_- H)$.

La donnée de $(H, \partial_- H)$, de la gigogne de défauts $\{X_1\}$, et de $i_\infty : H_\infty \rightarrow H$ constitue ce qu'on va appeler une présentation de l'anse de Casson $(H_\infty, \partial_- H_\infty)$. On va d'ailleurs noter $H_k = i_\infty^{-1}(H - \overset{\circ}{X}_k)$ et $\partial_- H_k = \partial_- H_\infty$; alors, $H_\infty = \bigcup_k H_k$. La variété H_k est appelée la tour d'hauteur k , ses étages sont $E_j = i_\infty^{-1}(X_{j-1} - \overset{\circ}{X}_j)$, $j \leq k$; la restriction de i_∞ à H_k sera notée $i_k : H_k \rightarrow H$.

La peau de $(H_\infty, \partial_- H_\infty)$ est $\partial_+ H_\infty = i_\infty^{-1}(\partial_+ H)$; ensuite, par intersection avec $\partial_+ H_\infty$, on définit la peau $\partial_+ H_k$ de H_k et $\partial_+ E_k$ de E_k . Similairement $\partial_+ X_k = X_k \cap \partial_+ H$.

Une anse de Casson $(H_\infty, \partial_- H_\infty)$ n'est jamais compacte; nous allons souvent rencontrer la compactification par bouts \hat{H}_∞ de H_∞ .

Rappelons que la compactification par bouts \hat{M} d'un espace connexe localement connexe et localement compact M est la compactification de Freudenthal (= "end compactification") qui ajoute à M l'espace compact 0-dimensionnel $\text{Bouts}(M) = \lim \text{proj} \{ \pi_0(M-K) \mid K \text{ compact dans } M \}$. (N.B. Dès que $K' \supset K$ est un voisinage de K , l'image de $\pi_0(M-K') \rightarrow \pi_0(M-K)$ est finie.) Voici une définition commode de \hat{M} . Soit M_K la somme amalgamée avec $\overset{\circ}{M}$ des compactifiés d'Alexandroff par un point de chacune des composantes connexes de $M - \overset{\circ}{K}$; alors $\hat{M} = \lim \text{proj} \{ M_K \mid K \text{ compact } \subset M \}$.

\hat{H}_∞ s'identifie (par i_∞) au quotient de H^4 obtenu en écrasant chaque composante connexe de Ω en un point. (Pour vérifier ceci, il convient de remarquer d'abord que $\pi_0(\Omega)$ avec sa topologie compacte est $\lim \text{proj} \{ \pi_0(U) \mid H \supset U \text{ ouvert } \supset \Omega \}$.)

Remarquons que \hat{H}_∞ est la compactification d'Alexandroff par un point, précisément si $\Omega \subset H$ est connexe ou encore si chaque défaut multiple successif X_1 est un seul défaut (connexe). Le lecteur qui se sent rebuté par les complexités à venir a intérêt à se restreindre d'abord à ce cas, qui illustre déjà toutes les idées géométriques.

\hat{H}_∞ jouit de toutes les propriétés homologiques locales d'une variété; c'est ce qu'on appelle une variété homologique; mais son bord formel, l'adhérence de ∂H_∞ , n'est pas une variété topologique près des bouts. Par exemple, si Ω est connexe, $\partial H_\infty \cong \partial H - \partial_+ \Omega$ est, par définition même, une des 3-variétés contractiles de J.H.C. Whitehead $[Wh_1]$ $[Wh_2]$, à π_1 -système non trivial à l'infini; $\partial_+ \Omega \subset \partial H \cong S^3$ est un compact de Whitehead. (Dans le cas général $\partial_+ \Omega$ est appelé un compact de Whitehead ramifié.)

Ainsi, $((H^4 - \Omega)^\wedge, \partial_- H)$ n'a aucune chance d'être une anse topologique.

Par contre, $H^4 - (\partial_+ H^4 \cup \Omega) \approx B^2 \times R^2$; ce sera le résultat central de cet exposé :

THÉOREME 2.1 (M.H. Freedman, 1981).

Toute anse ouverte M^4 de Casson est homéomorphe à $B^2 \times D^2 \approx B^2 \times R^2$.

La preuve de 2.1 part d'un résultat de l'année 1978, quand Freedman a pu construire une 4-variété lisse sans bord $M^4 \not\cong S^3 \times R$ qui est pourtant l'image d'une application propre de degré ± 1 , $S^3 \times R \rightarrow M^4$; voir $[Fr_1]$ $[Si_4]$.

Une tour de Casson de hauteur k , ou plus brièvement une C_k , est un couple difféomorphe à $(H^4 - \overset{\circ}{X}_k, \partial_- H^4)$ où $X_1 \supset X_2 \supset \dots$ est une gigogne de défauts dans une anse $(H, \partial_- H)$.

CONJECTURE DE POINCARÉ

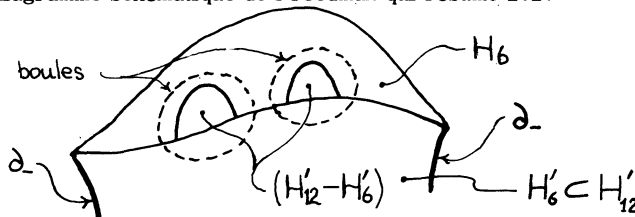
THÉOREME DE MITOSE (version finie) 2.2. Soit $(H_6, \partial_- H_6)$ une C_6 de Casson. On peut toujours y trouver une C_{12} , soit $(H'_{12}, \partial_- H'_{12})$, telle que :





$$(1) \partial_- H'_{12} = \partial_- H_6, \quad (2) H'_{12} - \partial_- H_6 \subset \text{int} H_6,$$

(3) $H'_{12} - H_6$ est contenu dans une somme disjointe de plusieurs boules dans $\text{int} H_6$, une boule pour contenir chaque composante connexe. \square

La condition (3) est liée au fait que, pour toute tour de Casson $(H_k, \partial_- H_k)$, la variété H_k peut s'exprimer comme le voisinage régulier d'un 1-complexe, cf. [CaG].

Voici un diagramme schématique de Freedman qui résume 2.2.



Dans le § 3  va représenter un C_6 et  un C_{12} , etc. (Du point de vue de la représentation des arêtes sur le bord, on ferait peut-être mieux d'utiliser  et ).

Les méthodes de [Fr₁] (cf. [Si₄]) permettent de donner la preuve de 2.2 ; pourtant elle est encore plus fastidieuse que les preuves analogues dans [Fr₁] [Si₄]. Nous ne l'aborderons point dans cet exposé.

Remarque. Tout couple $(k, 2k)$, $k > 6$, mis à la place de $(6, 12)$ dans 2.2, donne un énoncé qu'on déduit sans trop de peine, et qu'on pourrait utiliser à la place de 2.2 dans la suite.

Puisque nous allons utiliser 2.2 à tour de bras, il convient de faire le

CHANGEMENT DE NOTATIONS 2.3. Dorénavant, on écrit H_k et X_k à la place de H_{6k+6} et X_{6k+6} , $k = 0, 1, 2, \dots$. (Ainsi le sens de $E_k = H_k - H_{k-1}$, i_k , etc. est changé.)

THÉOREME DE MITOSE (version infinie) 2.4. Soit $(H_\infty, \partial_- H_\infty)$ une anse de Casson présentée comme ci-dessus, et soit $k \geq 0$ un entier. Il existe une autre anse de Casson $(H'_\infty, \partial_- H'_\infty) \subset (H_\infty, \partial_- H_\infty)$ vérifiant les conditions :

- 1) $H'_{k-1} = H_{k-1}$ (si $k \geq 1$) ;
- 2) $\bar{H}'_\infty - H'_{k-1} \subset (\text{int} H_k) - H_{k-1}$;
- 3) L'adhérence \bar{H}'_∞ de H'_∞ dans H_∞ est la compactification par bouts de H'_∞ .

Cette version infinie 2.4 découle de la version finie 2.2, par une répétition infinie ; on rétrécit suffisamment les boules offertes par 2.2 pour assurer la condition 3) de 2.4.

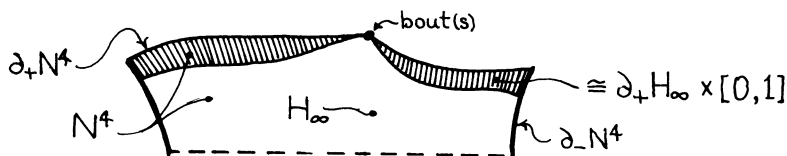
§ 3. - L'ARCHITECTURE DE LA CO-ORDINATISATION TOPOLOGIQUE

Les constructions ambitieuses à venir appliquent le théorème de mitose 2.4 et de la géométrie élémentaire pour ramener le théorème 2.1, que toute anse ouverte de Casson M^4 est homéomorphe à $B^2 \times R^2$, à deux théorèmes d'approximation par homéomorphismes.

Quant aux anses de Casson, nous utiliserons la terminologie du § 2 sous sa forme modifiée en 2.3 (par une réindexation).

L'anse de Casson ouverte M^4 sera identifiée à $N - \partial_+ N$ où $(N, \partial_- N)$ est une anse de Casson (non ouverte). Soit \hat{N} la compactification par bouts de N .

Soustrayant de N l'intérieur (topologique) d'un voisinage en collier de $\partial_+ N$ dans N , très pincé vers les bouts de N , on obtient une anse de Casson $(H_\infty, \partial_- H_\infty) \subset (M, \partial M) \subset (N, \partial_- N)$ dont l'adhérence dans \hat{N} est la compactification par bouts \hat{H}_∞ de H_∞ . On fixe une présentation de $(H_\infty, \partial_- H_\infty)$.



Dans un premier temps, il s'agit de construire un système ramifiant d'anses de Casson dans $(N, \partial_- N)$ qui, en quelque sorte, explorent son intérieur.

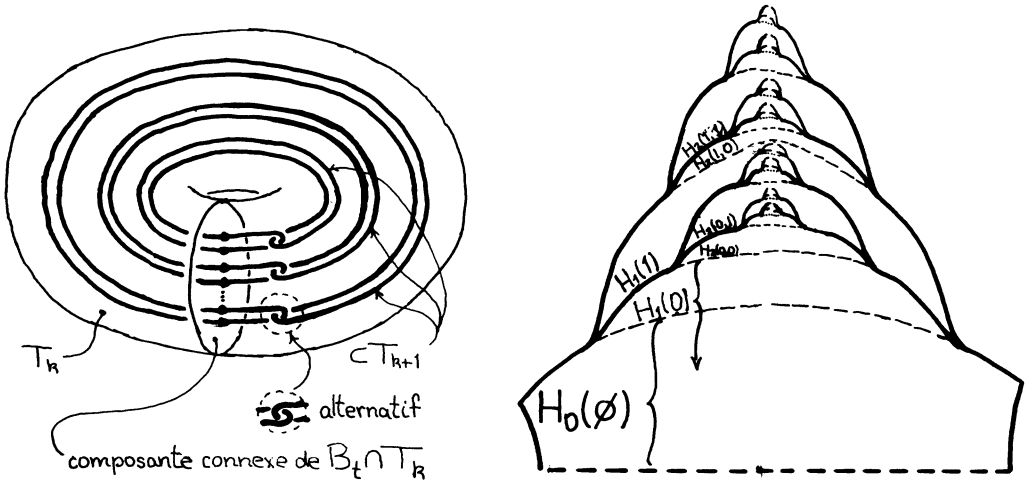
3.1 Construction. Pour chaque suite finie (a_1, a_2, \dots, a_k) dans $\{0, 1\}$ (suite dyadique finie), on peut définir une anse présentée de Casson $(H_\infty(a_1, \dots, a_k), \partial_- H_\infty)$ contenue dans $(H_\infty, \partial_- H_\infty)$ dont la présentation consiste en un plongement $i_k(a_1, \dots, a_k) : H_\infty(a_1, \dots, a_k) \rightarrow B^2 \times D^2$ et en une gigogne de défauts $X_k(a_1, \dots, a_k)$ dans l'anse standard $B^2 \times D^2$, de sorte que : (Pour (1) à (5), voir le dessin de droite de la prochaine page.)

- (1) $H_\infty = H_\infty(\emptyset)$ (cas $k = 0$), même en tant qu'anse présentée de Casson.
- (2) $H_\infty(a_1, \dots, a_k, 1) = H_\infty(a_1, \dots, a_k)$, même en tant qu'anse présentée de Casson.
- (3) $H_k(a_1, \dots, a_k, 0) = H_k(a_1, \dots, a_k)$.
- (4) L'adhérence $\bar{H}_\infty(a_1, \dots, a_k, 0)$ dans \hat{H}_∞ est la compactification par bouts de $H_\infty(a_1, \dots, a_k, 0)$.
- (5) $\bar{H}_\infty(a_1, \dots, a_k, 0) - H_k(a_1, \dots, a_k) \subset \hat{H}_{k+1}(a_1, \dots, a_k) - H_k(a_1, \dots, a_k)$
- (6) $i_k(a_1, \dots, a_k, 0) = i_k(a_1, \dots, a_k)$, d'où $X_k(a_1, \dots, a_k, 0) = X_k(a_1, \dots, a_k)$.
- (7) L'intersection de $X_{k+(1/6)}(a_1, \dots, a_k, 0)$ et $X_{k+(1/6)}(a_1, \dots, a_k)$ est vide et leur réunion est un défaut multiple dans $X_k(a_1, \dots, a_k)$.

Il faut aussi une condition de cohérence sur la gigogne totale assurée par (7), c'est-à-dire $\{X_k\}$, où $X_k = \bigcup X_k(a_1, \dots, a_k)$. Pour la formuler, on suspend momentanément la convention de réindexation C.3, et on pose $T_k = \partial_+ X_k$.

- (8) (sans C.3). Il existe un intervalle $J \subset \partial D^2$ tel que, pour tout $t \in J$, le disque méridien $B_t = B^2 \times t$ du tore solide $B^2 \times \partial D$ rencontre les tores solides multiples T_k

idéalement en ce sens que chaque composante connexe de $B_t \cap T_k$ est un disque méridien de T_k qui rencontre T_{k+1} de la façon idéale illustrée dans la figure de gauche ci-dessous.



Exécution de 3.1 (par induction sur k). On part de $H_\infty(\emptyset) = H_\infty$. Ayant défini les anses présentées pour toute suite de longueur $\leq k$ ($k \geq 0$), on les définit pour toute suite $(a_1, \dots, a_k, 1)$ par (2). Puis, on définit $H_\infty(a_1, \dots, a_k, 0)$ par le théorème de mitose (version infinie 2.4); ceci assure les conditions (3), (4) et (5). Il reste à définir la présentation de l'anse de Casson $(H_\infty(a_1, \dots, a_k, 0), \partial_- H_\infty)$ de telle façon que les deux dernières conditions (6) et (7) soient remplies. Pour définir $i_\infty(a_1, \dots, a_k, 0)$, il convient de greffer sur $i_k(a_1, \dots, a_k)$ une présentation de la partie nouvelle de l'anse de Casson $(H_\infty(a_1, \dots, a_k, 0), \partial_- H_\infty)$, à savoir l'anse multiple de Casson $(H_\infty(a_1, \dots, a_k, 0) - \overset{\circ}{H}_k(a_1, \dots, a_k, 0), \delta H_k(a_1, \dots, a_k, 0))$ (où exceptionnellement \circ et δ indiquent l'intérieur et la frontière dans $H_\infty(a_1, \dots, a_k, 0)$ plutôt que dans \hat{N}); la greffe se fait à l'aide du lemme 2.0. La dernière condition (7) est assurée après coup, par une isotopie à support dans $\overset{\circ}{X}_k(a_1, \dots, a_k)$. Ayant (1) à (7), le lecteur saura assurer aussi (8) ensuite. \square

Remarque. Si (a_1, a_2, \dots) est une suite infinie dans $\{0, 1\}$, la réunion $H_\infty(a_1, a_2, \dots) = \bigcup_k H_k(a_1, a_2, \dots, a_k)$ donne une anse de Casson avec une présentation évidente; en plus, son adhérence $\bar{H}_\infty(a_1, a_2, \dots)$ la compactifie par bouts (exercice). Ainsi, nous avons dans N une vaste collection d'anses de Casson commodément emboîtées.

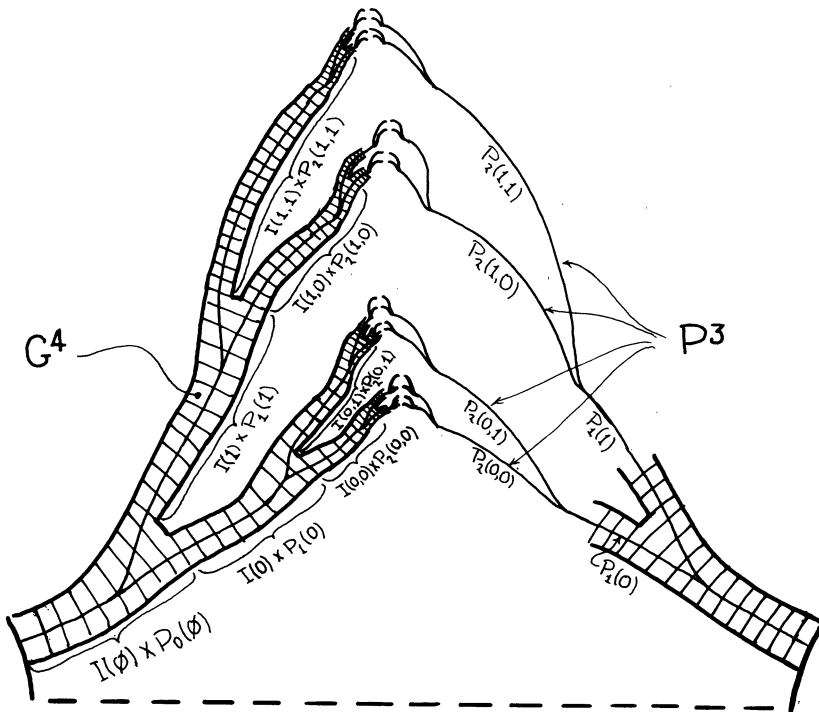
Du système d'anses présentées $(H_\infty(a_1, \dots, a_k), \partial_- H_\infty)$, nous utiliserons surtout les peaux $\partial_+ H_\infty(a_1, \dots, a_k)$. La réunion

$$P^3 = \bigcup \{ \partial_+ H_\infty(a_1, \dots, a_k) \}$$

de toutes ces peaux est ce qu'on appelle une variété branchée dans N^4 , puisque, près de tout point $P^3 - \partial_- H_\infty$, le couple (N^4, P^3) est C^1 -isomorphe (puis même C^∞ -isomorphe, après du bricolage qu'on laisse au lecteur) au produit de R^2 avec le modèle de branchement $(R^2, Y^1) : (\bigvee)$, où Y^1 est réunion de deux courbes lisses $\cong R^1$ proprement plongées dans R^2 qui ont en commun exactement une demi-droite fermée.

On constate sans difficulté que l'adhérence \bar{P} de P dans \hat{N} est la compactification par bouts de P .

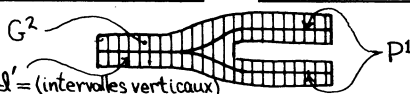
La variété branchée P^3 se scinde le long de ses points singuliers en variétés compactes : $P_k(a_1, \dots, a_k) = \partial_+ E_k(a_1, \dots, a_k) = E_k(a_1, \dots, a_k) \cap \partial_+ H_\infty(a_1, \dots, a_k)$. Ainsi, $P_k(a_1, \dots, a_k)$ est la peau du k -ième étage de $(H_\infty(a_1, \dots, a_k), \partial_- H_\infty)$.



3.2 Construction de la griffe G^4 (voir figure ci-dessus).

Pour P^3 , on construit un voisinage G^4 dans N^4 appelé la griffe, muni d'une décomposition \mathfrak{J} de G^4 en intervalles disjoints, de sorte que :

1) Pour tout intervalle I_α de \mathcal{J} , l'intersection $I_\alpha \cap \partial_- N$ est I_α ou \emptyset ; et un voisinage de I_α dans $(G^4, P^3; \mathcal{J})$ est isomorphe au produit de R^2 avec un ouvert du modèle 2-dimensionnel $(G^2, P^1; \mathcal{J}')$ suivant :



2) L'adhérence \bar{G} de G dans \hat{N} est sa compactification par bouts, et coïncide
(donc) avec $G \cup \bar{P}$. \square

Il s'agit de combiner assez naïvement des (bi-)colliers de sous-variétés véritables de P^3 . D'ailleurs, nous avons clairement le droit de supposer que G^4 contient le collier $N - \overset{\circ}{H}_\infty$ de $\partial_+ N$.

La griffe $(G^4; \mathfrak{J})$ décomposée en intervalles se scinde de façon canonique (le long de la 3-variété formée des intervalles exceptionnels de \mathfrak{J} ayant des points intérieurs sur ∂G^4) en de véritables I-fibrés triviaux $I(a_1, \dots, a_k) \times P_k(a_1, \dots, a_k)$, où $I(a_1, \dots, a_k)$ est un 1-simplexe et $(\text{son centre}) \times P_k(a_1, \dots, a_k) \subset G^4$ est presque l'inclusion naturelle $P_k(a_1, \dots, a_k) \subset G^4$: plus exactement les deux sont isotopes dans G^4 par une isotopie qui ne bouge qu'un collier du bord de $P_k(a_1, \dots, a_k)$.

CONJECTURE DE POINCARÉ

Il convient de donner une orientation normale à P^3 dans N^4 (vers l'extérieur), pour en déduire les orientations cohérentes des 1-simplexes $I(a_1, \dots, a_k)$.

3.3 Construction de $g : G^4 \rightarrow B^2 \times D^2$.

Ce g sera un plongement lisse qui va révéler la structure de G^4 .

On choisit par récurrence des plongements linéaires $I(a_1, \dots, a_k) \subset (0, 1]$ conservant l'orientation. Pour commencer, $I(\emptyset) \subset (0, 1]$ aboutit à 1. Supposons maintenant ces plongements définis pour les suites de longueur $\leq k$. Alors, on plonge $I(a_1, \dots, a_k, 0)$ et $I(a_1, \dots, a_k, 1)$ respectivement sur le tiers initial et le tiers final de l'intervalle $I(a_1, \dots, a_k) \subset (0, 1]$; le tiers central de $I(a_1, \dots, a_k)$ est un intervalle fermé qu'on se permet d'appeler $J(a_1, \dots, a_k)$. Le complément dans $I(\emptyset)$ de tous les intervalles ouverts $J(a_1, \dots, a_k)$ est alors un compact de Cantor dans $(0, 1]$.

D'un autre côté, on constate que les plongements $i_k(a_1, \dots, a_k) : \partial_+ H_k(a_1, \dots, a_k) \rightarrow B^2 \times \partial D^2$ définissent ensemble une application lisse $i : P \rightarrow B^2 \times \partial D^2$.

Soit $\varphi : (0, 1] \times B^2 \times \partial D^2 \rightarrow B^2 \times D^2$ le plongement $(t, x, y) \rightarrow (x, ty)$; nous aurons tendance à identifier source et but par φ .

Nous définissons $g : G^4 \rightarrow B^2 \times D^2$ sur $I(a_1, \dots, a_k) \times P_k(a_1, \dots, a_k)$ par la règle $(t, x) \rightarrow \varphi(t, i(x))$. Pour que cette définition soit cohérente, il faut d'abord ajuster par isotopie les trivialisations données des I -fibrés $I(a_1, \dots, a_k) \times P_k(a_1, \dots, a_k)$ dans (G^4, \mathcal{J}) , tâche de routine qui est laissée au lecteur. \square

3.4 Construction de $g_0 : G_0^4 \rightarrow B^2 \times D^2$.

Soit G_0^4 la réunion de G^4 et d'un petit voisinage en collier C^4 de $\partial_- N$ dans N qui respecte $\mathcal{E} G^4$ (voir la figure pour 3.2). Prolongeons g en un plongement $g_0 : G_0^4 \rightarrow B^2 \times D^2$. Par unicité des colliers, on peut arranger g et g_0 de sorte que g_0 envoie $C^4 - G^4$ sur $(B^2 - \lambda B^2) \times \mu D^2$, où $\lambda \in (0, 1]$ est proche de 1 et μ est le point initial de $I(\emptyset)$. \square

En regardant de près g_0 et son image, nous allons constater que nous avons complètement décrit la topologie de l'adhérence \bar{G}_0^4 de G_0^4 dans \hat{N}^4 .

3.5 L'image $g_0(G_0^4) \subset B^2 \times D^2$.

Quelques notations encore (voir les deux figures ci-dessous).

$T(a_1, \dots, a_k) \equiv T_k(a_1, \dots, a_k) = \partial_+ X(a_1, \dots, a_k)$, un tore solide multiple $\subset B^2 \times \partial D^2$.

$T_*(a_1, \dots, a_k) = \varphi(J(a_1, \dots, a_k) \times T(a_1, \dots, a_k)) \subset B^2 \times D^2$, un exemplaire radialement épaissi de $T(a_1, \dots, a_k)$, appelé un trou.

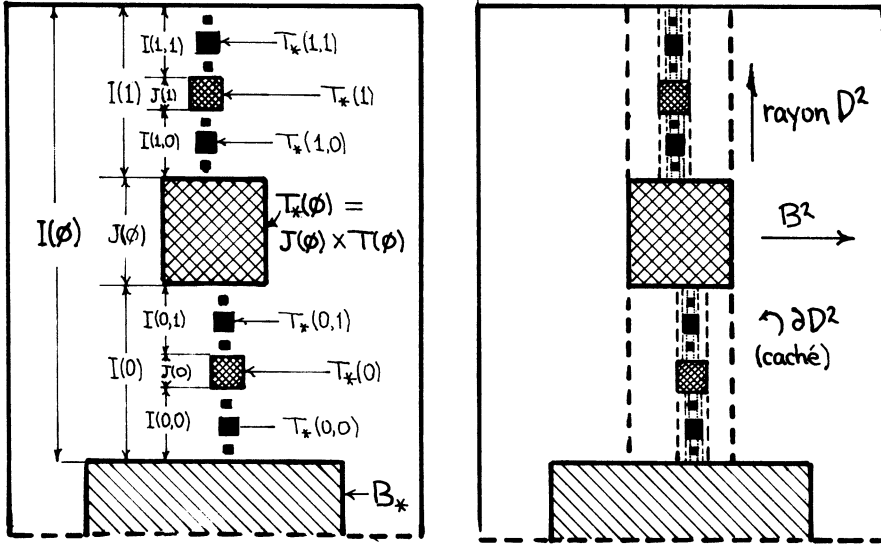
$B_* = \lambda B^2 \times \mu D^2$ (voir définition de g_0), appelé le trou central.

$F_k = \bigcup \{ \varphi(I(a_1, \dots, a_{k-1}) \times T(a_1, \dots, a_k)) \mid k \text{ fixe} \}$; les frontières ∂F_k , $k \geq 2$, sont indiquées en pointillé dans la figure de droite ci-dessous.

$(B^2 \times D^2)_0 = B^2 \times D^2 - B_* - \bigcup \{ T_*(a_1, \dots, a_k) \}$, appelé l'anse standard trouée.

$W_0 = \bigcap_k F_k$, un compact dans $(B^2 \times D^2)_0$.

Avec ces notations, on constate que l'image $g_0(G_0^4)$ est $(B^2 \times D^2)_0 - W_0$. \square



3.6 Le diagramme principal.

Ce diagramme commutatif donne un aperçu des constructions à venir.

$$\begin{array}{ccc}
 G_0^4 & \xrightarrow{g_0} & (B^2 \times D^2)_0 \\
 \downarrow \wr & & \downarrow q \text{ quot} \\
 \bar{G}_0^4 & \xrightarrow[g_1]{\approx} & (B^2 \times D^2)_0 / \mathbb{w}_0 \\
 \downarrow \wr & & \downarrow q_1 \text{ quot} \\
 \hat{N}^4 & \xrightarrow{g_2} & (B^2 \times D^2) / \mathbb{d}^+ \\
 \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
 M^4 & \xrightarrow{g_3} & (B^2 \times \mathring{D}^2) / \mathbb{d} \\
 & \searrow f & \downarrow q_3 \text{ quot} \\
 & & (B^2 \times D^2) / \mathbb{d}_+
 \end{array}$$

Les éléments seront construits dans l'ordre \mathbb{w}_0 , g_1 , \mathbb{d}^+ , g_2 , \mathbb{d} , g_3 , \mathbb{d}_+ , f .

La preuve que $(B^2 \times \mathring{D}^2) / \mathbb{d}_+ \approx B^2 \times \mathring{D}^2$ (par les méthodes de Bing) est réservée au § 4. La preuve qu'ensuite f est approximable par homéomorphismes est réservée au § 5.

3.7. Construction de \mathbb{w}_0 et g_1 .

\mathbb{w}_0 est la décomposition du compact $(B^2 \times D^2)_0$ dont les éléments non dégénérés sont les composantes connexes ω du compact $W_0 \subset (B^2 \times D^2)_0$. Chaque $\omega \in \mathbb{w}_0$ est un compact de Whitehead dans un seul niveau $\varphi(t \times B^2 \times \partial D^2)$.

On vérifie naïvement que l'inclusion $(B^2 \times D^2)_0 - W_0 \subset (B^2 \times D^2)_0 / \mathbb{w}_0$ induit un homéomorphisme $((B^2 \times D^2)_0 - W_0)^\wedge \xrightarrow{\approx} (B^2 \times D^2)_0 / \mathbb{w}_0$.

On sait déjà que \hat{G}_0 s'identifie à $\bar{G}_0 \subset \hat{N}$.

Définissons alors l'homéomorphisme g_1 comme composition :

$$g_1 : \bar{G}_0 = \hat{G}_0 \xrightarrow[\approx]{\hat{g}_0} ((B^2 \times D^2)_0 - W)^\wedge \xrightarrow{\approx} (B^2 \times D^2)_0 / \mathbb{w}_0. \quad \square$$

3.8 Construction de \mathfrak{d}' et g_2 .

Soit \mathfrak{d}' la décomposition de $B^2 \times D^2$ donnée par les B_* et $\{T_*(\alpha) \mid \alpha \text{ suite dyadique finie}\}$ et les éléments de \mathfrak{w} qui en sont disjoints.

Pour définir $g_2: \hat{N}^4 \rightarrow (B^2 \times D^2)/\mathfrak{d}'$, on doit étendre $q_1 g_1: \bar{G}_0^4 \rightarrow (B^2 \times D^2)/\mathfrak{d}'$ à chaque composante connexe Y de $\hat{N} - \bar{G}_0^4$. Sa frontière ∂Y s'identifie par g_1 au quotient dans $(B^2 \times D^2)/\mathfrak{w}_0$, soit de ∂B_* , soit d'un bord d'une composante connexe d'un trou $T_*(a_1, \dots, a_k)$. Par définition, $g_2(Y)$ est l'image dans $(B^2 \times D^2)/\mathfrak{d}'$ de ce bord. On vérifie aisément la continuité de g_2 . \square

Ensuite, g_3 et \mathfrak{d} dans le diagramme principal se définissent par restriction.

La griffe G^4 nous a amenés inexorablement à définir $g_3: M^4 \rightarrow (B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathfrak{d}$ qui compare l'anse ouverte de Casson M^4 avec un quotient très explicite de l'anse ouverte $B^2 \times \overset{\circ}{D}^2$.

La décomposition \mathfrak{d} qui spécifie ce quotient a des éléments non cellulaires, à savoir les trous $T_*(a_1, \dots, a_k)$, chacun du type d'homotopie d'un cercle. Donc l'application quotient $B^2 \times \overset{\circ}{D}^2 \rightarrow (B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathfrak{d}$ n'est certainement pas approximable par des homéomorphismes. On peut d'ailleurs vérifier que la cohomologie $H^2(\check{\text{Cech}})$ du quotient est de type infini.

La construction de \mathfrak{d}_+ ci-dessous répare ce grave défaut ; elle se fait à la main ; \mathfrak{d}_+ sera moins fine que \mathfrak{d} ce qui nous permet ensuite de définir sans effort $f = q_3 g_3$.

3.9 Construction de \mathfrak{d}_+ .

On pose $W = W_0 \cap (B^2 \times \overset{\circ}{D}^2) = W_0 - (B^2 \times \partial D^2)$. Ses composantes connexes définissent une décomposition \mathfrak{w} de $B^2 \times \overset{\circ}{D}^2$. On sait montrer depuis les années 50 que $(B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathfrak{w} \approx B^2 \times \overset{\circ}{D}^2$, voir § 4.

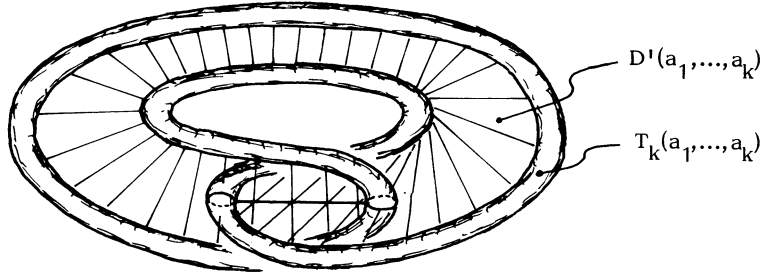
Pour les besoins du prochain paragraphe, le quotient $(B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathfrak{d}_+$ doit être un quotient de $(B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathfrak{w}$ par une décomposition dont les éléments sont les composantes connexes de $\cup \{qT_*(\alpha) \cup E(\alpha) \mid \alpha \text{ une suite dyadique finie}\}$ où $\{E(\alpha)\}$ est une collection de 2-disques multiples topologiques plats et disjoints telle que, pour toute suite dyadique finie α , l'intersection $E(\alpha) \cap \bigcup_{\alpha'} \{qT_*(\alpha')\}$ est, d'un côté, le bord $\partial E(\alpha)$, et, de l'autre côté, une longueur multiple de $\partial T_*(\alpha)$ loin de W (chaque composante connexe de $qT_*(\alpha) \cup E(\alpha)$ est alors contractile). En plus, on veut que le diamètre des composantes connexes de $E(a_1, \dots, a_k)$ tende vers 0 (sur chaque compact) quand $k \rightarrow \infty$. Le § 4 n'exige pas plus. Et visiblement, $\{E(\alpha)\}$ spécifie ainsi \mathfrak{d}_+ .

La spécification de $\{E(\alpha)\}$ est hélas fastidieuse. $E(\alpha)$ sera l'image fidèle $qD(\alpha)$ d'un disque multiple dans $B^2 \times \overset{\circ}{D}^2$. Pour des raisons de π_1 , ce disque multiple $D(\alpha)$ est obligé de rencontrer W ; mais, pour assurer la platitude de $qD(\alpha)$ (prouvée au § 4), il faut une rencontre très gentille permise par les conditions (7) et (8) de 3.1.

On a $T_k = \bigcup_{\alpha} T_k(\alpha)$; les conditions (6) et (7) de 3.1 assurent que T_k est un tore solide multiple dont certaines composantes connexes constituent $T_k(\alpha)$. On a $\bigcap_k T_k = pW$, qui est un compact de Whitehead ramifié dans $B^2 \times \partial D^2$.

Pour commencer, on spécifie (simultanément et indépendamment) dans $B^2 \times \partial D^2$ des disques (topologiquement) immergés et localement plats $D'(\alpha)$ qui seront les projections $pD(\alpha) = D'(\alpha)$. On assure aisément les deux propriétés (a) et (b) dont (b) utilise (8) de 3.1.

(a) $D'(a_1, \dots, a_k)$ est une somme disjointe de disques immergés dans T_{k-1} , avec comme seules singularités, un arc de points doubles chacun, hors de $T_k(a_1, \dots, a_k)$. Le bord $\partial D'(a_1, \dots, a_k)$ est formé d'une longitude de chaque composante connexe de $\partial T_k(a_1, \dots, a_k)$. Les points doubles de $D'(a_1, \dots, a_k)$ se trouvent hors de $\overset{\circ}{T}_k(a_1, \dots, a_k)$.



(b) Pour tout $\ell \geq k$, l'intersection $\overset{\circ}{D}'(a_1, \dots, a_k) \cap T_\ell$ est un disque multiple (plongé dans $T_k(a_1, \dots, a_k)$) dont chaque composante connexe D_0 est un disque méridien de T_ℓ qui rencontre les tores solides de la prochaine génération ($T_{\ell+(1/6)}$ avec notre indexation révisée en C.3) idéalement (voir la figure de gauche à la deuxième page de ce paragraphe).

Par résolution des points doubles de $D'(\alpha)$, on a un disque multiple abstrait $D(\alpha)$ qu'il s'agit de plonger dans $(0, 1) \times B^2 \times \partial D^2 \subset B^2 \times D^2$ en spécifiant la première co-ordonnée par une fonction convenable $\rho(\alpha) : D(\alpha) \rightarrow (0, 1)$.

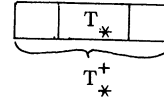
On va plonger un seul $D(\alpha)$ à la fois (suivant un ordre quelconque). Plongeons un premier $D(a_1, \dots, a_k)$ de proche en proche (par une induction secondaire).

Quelques notations :

$$T_\star^+(a'_1, \dots, a'_\ell) = J(a'_1, \dots, a'_\ell) \times T(a'_1, \dots, a'_{\ell-1})$$

$$F_\ell^\star = p^{-1}pF_\ell = (0, 1) \times T_\ell$$

$$W^+ = p^{-1}pW = (0, 1) \times (\bigcap_k T_k).$$



On assure aisément, pour $D(a_1, \dots, a_k)$, les propriétés (c) et (d) $_\ell$ ($\ell > k$), dont (d) $_\ell$ n'est que provisoire.

(c) $D(a_1, \dots, a_k)$ est plongé, est contenu dans $I(a_1, \dots, a_{k-1}) \times T(a_1, \dots, a_{k-1})$, et est disjoint de B_\star et de $\bigcup \{T_\star^+(\alpha') \mid \alpha' \neq (a_1, \dots, a_k)\}$. Le bord $\partial D(a_1, \dots, a_k)$ est dans un seul niveau $t \times B^2 \times \partial D^2$, où $t \in \overset{\circ}{J}(a_1, \dots, a_k)$.

(d) $_\ell$ Chaque composante connexe du disque multiple $F_\ell^+ \cap D(a_1, \dots, a_k)$ est dans un seul niveau $t \times B^2 \times \partial D^2$; ce niveau est disjoint de toute boîte $T_\star(\alpha')$, et ne contient aucune autre composante connexe de $F_\ell^+ \cap D(a_1, \dots, a_k)$.

Pour $\ell = k$ et $k+1$, voici des illustrations du graphe de ρ dans un cas simple :



Observons qu'en poussant $D(a_1, \dots, a_k)$ verticalement aussi peu qu'on veut, et seulement sur $F_\ell^+ \cap D(a_1, \dots, a_k)$, on peut passer de $(d)_\ell$ à $(d)_{\ell+1}$ sans perdre (c).

Donc, sans perdre (c), on peut passer à la propriété :

(d) Pour chaque entier $\ell > k$, les composantes connexes du disque multiple $F_\ell^+ \cap D(a_1, \dots, a_k)$ se projettent sur autant d'intervalles disjoints de rayon $< (0, 1)$.

Cette condition assure que, pour tout $\omega \in \mathbb{W}$, l'intersection $\omega \cap D(a_1, \dots, a_k)$ est une intersection de disques (cellulaire). Donc $qD(a_1, \dots, a_k)$ est bien un disque (cf. 4.3) ; au § 4, nous prouverons à la main qu'il est un disque plat.

Si, avant $D(a_1, \dots, a_k)$, on a déjà défini (pour la récurrence principale) une collection finie de disques $D(\alpha_1), \dots, D(\alpha_n)$, on suit la même construction que ci-dessus, tout en restant dans un voisinage de $T_\star^+(a_1, \dots, a_k)$ (assuré par (c)) disjoint de $D(\alpha_1) \cup \dots \cup D(\alpha_n)$ et de tous les éléments de \mathbb{W} qui touchent à $D(\alpha_1) \cup \dots \cup D(\alpha_n)$.

Ainsi la famille $\{D(\alpha)\}$ de 2-disques disjoints se définit par une double récurrence et vérifie les propriétés (a), (b), (c), (d), (avec $pD(\alpha) = D'(\alpha)$). Puis, $\{D(\alpha)\}$ définit \mathfrak{D}_+ comme déjà indiqué.

On vérifie aisément toutes les propriétés voulues pour $qD(\alpha) = E(\alpha)$ dans $(B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathbb{W}$, sauf la platitude locale de $E(\alpha)$ qui est réservée au § 4. \square

3.10 Fin de la preuve que $M \approx B^2 \times \overset{\circ}{D}^2$ (modulo § 4 et § 5).

Acceptant du § 4 que $(B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathfrak{D}_+ \approx B^2 \times \overset{\circ}{D}^2$, on démontre modulo § 5 l'approximabilité par homéomorphismes de $f : M^4 \rightarrow (B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathfrak{D}_+$ de la façon suivante. On forme le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{int } M^4 & \xrightarrow{f|} & (B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathfrak{D}_+ \mid \approx B^2 \times \overset{\circ}{D}^2 \approx S^4 - \infty \\ \downarrow S^4 & & \downarrow S^4 \\ S^4 & \xrightarrow{f_\star} & S^4 \end{array}$$

où l'inclusion $\text{int } M \subset S^4$ existe puisque M se plonge dans $B^2 \times \overset{\circ}{D}^2$ (les experts savent d'ailleurs que $\text{int } M$ est difféomorphe à R^4 [CaG]), et où $f_\star(S^4 - \text{int } M^4) = \infty$. Alors, $S(f_\star) = \{y \in S^4 \mid f_\star^{-1}(y) \neq (\text{un point})\}$ est visiblement un ensemble dénombrable.

Aussi $S(f_\star)$ est nulle part dense.

[Preuve : la restriction $f_\star| = q_3 q_1 g_1| : M \cap \bar{G}_0^4 \rightarrow (B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathfrak{D}_+$ est déjà surjective et $f_\star^{-1} S(f_\star)$ est contenu dans l'ensemble nulle part dense de $M \cap \bar{G}_0^4$ donné par $(\partial G_0) \cup \bigcup (\text{bouts de } G_0^4) \cup g_1^{-1}(\bigcup E(\alpha))$.]

Donc, d'après le théorème 5.1, l'application f_\star est approximable par homéomorphismes. Ensuite, par le principe de localisation § 4.2, la restriction $\text{int } M^4 \rightarrow (S^4 - \infty)$ l'est aussi, et de même $f|$ dans le diagramme. Finalement, par le principe de globalisation § 4.2*, l'application $f : M \rightarrow (B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathfrak{D}_+$ est approximable par homéomorphismes. Ainsi le théorème 2.1 est prouvé modulo § 4 et § 5. \square

Remarque. $\overline{S(f_\star)} \subset S^4$ est en fait un compact de dimension ≤ 1 , car c'est la réunion d'un ensemble dénombrable $S(f_\star)$ avec un ensemble de dimension 0, à savoir les bouts de G_0^4 qui ne sont pas dans la frontière d'une composante connexe Y de $M^4 - G_0^4$. Pour des raisons de cohomologie, $\dim \overline{S(f_\star)} \geq 1$; donc il s'agit d'un compact de dimension exactement 1.

§ 4. - LES RÉTRÉCISSEMENTS DE BING

Il s'agit de démontrer que l'espace $(B^2 \times D^2)/\mathfrak{d}_+$ défini au § 3 est homéomorphe à $B^2 \times D^2$. Les techniques nécessaires viennent toutes d'une série d'articles de R.H. Bing des années 1950 (voir surtout $[Bi_{1,2,3}]$), qui ont fait sa réputation de grand virtuose de la topologie géométrique.

On considère des applications propres et surjectives $f : X \rightarrow Y$ entre espaces (métrisables) localement compacts. Soit $\mathfrak{d} = \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\}$ la décomposition associée à f . Quand est-ce que f est (fortement) approximable par homéomorphismes, en ce sens que pour tout recouvrement ouvert \mathcal{V} de Y , le \mathcal{V} -voisinage $N(f, \mathcal{V}) = \{g : X \rightarrow Y \mid \forall x \in X, \exists V \in \mathcal{V}; f(x), g(x) \in V\}$ de f contient un homéomorphisme $h : X \rightarrow Y$?

Puisque f induit un homéomorphisme $\varphi : X/\mathfrak{d} \rightarrow Y$, on constate aisément que f est approximable par homéomorphismes si et seulement si on peut trouver des applications $g : X \rightarrow X$ telles que $\mathfrak{d} = \{g^{-1}(x) \mid x \in X\}$ et que fg approxime f (en effet, φ traduit g en un homéomorphisme $g' : Y \rightarrow X$). Cette observation rend plausible le

CRITÈRE DE BING 4.1.

f est approximable par homéomorphismes si et seulement si, pour tout recouvrement \mathcal{U} de X et \mathcal{V} de Y , il existe un homéomorphisme $h : X \rightarrow X$ tel que $h\mathfrak{d} \subset \mathcal{U}$, et pour tout compact $D \in \mathfrak{d}$, D et $h(D)$ sont $f^{-1}\mathcal{V}$ -proches en ce sens : il existe un $f^{-1}V \in f^{-1}\mathcal{V}$ qui contient $D \cup h(D)$.

On dit alors que \mathfrak{d} est rétrécissable.

On monte une preuve à la main, voir $[FMV]$ $[Ch]$, ou par catégorie de Baire $[Tor]$ $[Mor]$ (l'idée est de trouver des $h : X \xrightarrow{\sim} X$ qui convergent vers un $g : X \rightarrow X$ qui détermine \mathfrak{d}). La preuve donne aussi le

COMPLÈMENT. Si les h dans 4.1 respectent [ou fixent] un fermé $A \subset X$, alors f est approximable par des homéomorphismes qui envoient A sur $f(A)$ [ou qui coïncident sur A avec f], et réciproquement. \square

PRINCIPE DE LOCALISATION 4.2. Si $f : X \rightarrow Y$ est approximable par homéomorphismes et que Y est une variété (où Y vérifie le principe de déformabilité d'homéomorphismes venant de $[Ce]$ $[EdK]$, " \mathfrak{d}_1 " de $[Si_3]$), alors, pour tout ouvert V de Y , la restriction $f_V : f^{-1}V \rightarrow V$ de f est approximable par homéomorphismes.

Preuve de 4.2 (indications). Pour approximer f_V , on combine (par le principe " \mathfrak{d}_1 ") une série d'approximations de f , cf. $[Si_3]$, §3.5. Ce lemme n'est pas (je crois) dans la littérature car, pour les dimensions $\neq 4$, on a des résultats plus forts $[Si_2]$ $[Ed_2]$; d'ailleurs, après réflexion, l'argument compliqué de $[Si_2]$ marche. Dans chaque cas qui nous intéresse, le lecteur pourra trouver une preuve "ad hoc" plus triviale. \square

Contre-exemple. Ce principe est faux pour $X = Y = (\text{Cantor}) \times I = 2^{\mathbb{N}} \times I$, et $f = g \times (\text{id} \mid I)$ où $g(1, a_2, a_3, \dots) = (a_2, a_3, \dots)$, $g(0, a_1, a_2, \dots) = (0, 0, 0, \dots)$.

PRINCIPE DE GLOBALISATION 4.2*.

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application propre telle que, pour un ouvert $V \subset Y$, la restriction $f|_V : f^{-1}V \rightarrow V$ est approximable par homéomorphismes. Alors, f est approximable par des

CONJECTURE DE POINCARÉ

applications (propres) g telles que : (a) $g^{-1}V = f^{-1}V$, (b) $g|_V : g^{-1}V \rightarrow V$ est un homéomorphisme et (c) $g = f$ sur $X - (f^{-1}V)$. \square

Ce principe est facile à établir, car si \mathcal{V} est le recouvrement de V par les boules ouvertes centrées en $y \in V$ et de rayon $\inf \{d(y,z) \mid z \in Y-V\}$, alors toute application $\gamma : f^{-1}V \rightarrow V$ qui est dans $N(f|_V, \mathcal{V})$ se prolonge par f en une application $g : X \rightarrow Y$.

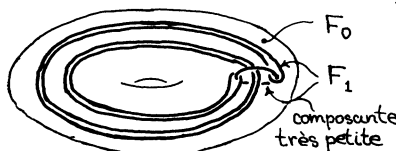
Dans le cas très particulier où \mathcal{D} est $\pi_0(K)$ pour un compact $K \subset X$, le critère de Bing se simplifie. (Alors, $\mathcal{D} = \{\text{les composantes connexes de } K\}$ et l'image de K dans X/\mathcal{D} est 0-dimensionnelle et s'identifie à $\pi_0(K)$.)

CRITÈRE 4.3. Dans ces conditions, \mathcal{D} est rétrécissable [respectant $A \subset X$] , si, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout ouvert \mathcal{D} -saturé U de X tel que $U \cap K$ est compact, il existe un homéomorphisme $h : X \rightarrow X$ à support dans U [et respectant $A \subset X$] tel que $h(K \cap U)$ s'exprime comme une somme disjointe finie de compacts, chacun de diamètre $< \epsilon$. \square

D'ailleurs, modulo localisation 4.2, cette condition est visiblement nécessaire.

Pour tout $\epsilon > 0$, on peut considérer $\mathcal{D}_\epsilon = \{D \in \mathcal{D} \mid \text{diam } D \geq \epsilon\}$. On constate que $U \setminus \{D \mid D \in \mathcal{D}_\epsilon\}$ est un fermé de X .

Voici un exemple remarquable et inquiétant où \mathcal{D} est évanescent et \mathcal{D}_ϵ est rétrécissable pour tout $\epsilon > 0$, mais \mathcal{D} n'est pas rétrécissable. Les éléments de \mathcal{D} sont les composantes connexes d'un compact $X = \bigcap_n F_n$ où F_0 et F_1 sont illustrés. On répète convenablement cette image dans chaque tore solide ; F_n est alors 2^n tores solides. Chaque $D \in \mathcal{D}$ est visiblement cellulaire, d'où \mathcal{D}_ϵ est rétrécissable par 5.2. Mais, à l'aide de revêtements cycliques, on vérifie que \mathcal{D} n'est pas rétrécissable. Voir [Bi₄] [ArB] .



Il y a heureusement des propriétés d'éléments individuels un peu plus fortes que la cellularité, qui écartent ce genre d'exemple.

Pour un compact $A \subset X$, on considère la propriété : $\mathcal{R}(X,A)$. Pour tout $\epsilon > 0$, pour toute décomposition évanescente \mathcal{D} de X contenant A , et pour tout voisinage U de A , il existe une application $f : X \rightarrow X$ à support dans U qui rétrécit (au moins) A (i.e. $f(A) = \{\text{point}\}$ et $f|_U : U \rightarrow U$ est approximable par homéomorphismes) , telle que, pour tout $D \in \mathcal{D}$, $\text{diam}(f(D)) \leq \max(\text{diam } D, \epsilon)$.

Si \mathcal{D} est fixé d'avance, on appelle la propriété (plus faible) : $\mathcal{R}(X,A;\mathcal{D})$.

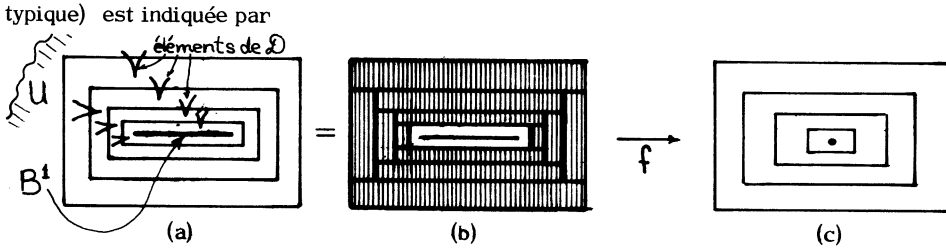
Observations. Pour tout voisinage U de A , on a $\mathcal{R}(X,A) \Leftrightarrow \mathcal{R}(U,A)$. En plus, $\mathcal{R}(X,A)$ est indépendant de la métrique.

PROPOSITION 4.4. Si \mathcal{D} est évanescente, et que $\mathcal{R}(X,D;\mathcal{D})$ est vérifiée pour tout $D \in \mathcal{D}$, alors \mathcal{D} est rétrécissable.

La preuve est un exercice édifiant. \square

PROPOSITION 4.5. $\mathcal{R}(X,A)$ est vérifié si A est un disque topologique plat de codimension quelconque dans l'intérieur d'une variété.

Preuve de 4.5. Ceci vaut $\mathcal{R}(R^n, B^k)$, $k \leq n$. La preuve de $\mathcal{R}(R^2, B^1)$ (qui est



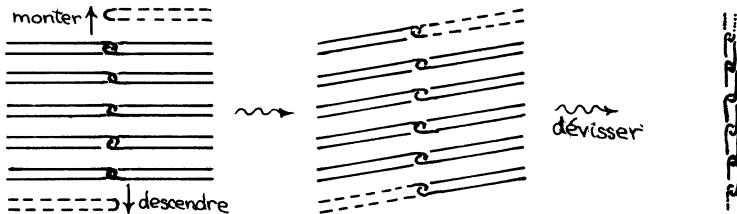
Dans (a), tout élément de \mathcal{D} qui rencontre le plus grand rectangle a déjà diamètre $< \epsilon/4$; si $D \in \mathcal{D}$ rencontre un cadre (entre rectangles successifs), il est disjoint du rectangle d'après. On pose $f(B^1) = 0$, et $f = (\text{identité})$ hors du plus grand rectangle (qui est $\subset U$) ; f est linéaire sur chaque intervalle vertical dans un rectangle de (b) et linéaire aussi sur chaque 1-cellule de la cellulation rectangulaire en (b) de (grand rectangle - B^1) ; en plus, $pf = p$ où p est la projection à l'axe de y (c'est R^{n-k} normale à B^k) ; finalement, la largeur de l'image de chacun des rectangles "verticaux" est $< \epsilon/4$. \square

On considère le couple $(B^2 \times S^1, j(B^2 \times S^1)) = (T, T')$ de Whitehead et le couple "épaissi" $(R \times T, I \times T')$.



LEMME 4.6. Soit $\epsilon > 0$ donné. Il existe une isotopie h_t , $0 \leq t \leq 1$, de $\text{id} \mid (R \times T)$, à support compact dans $(-\epsilon, 1+\epsilon) \times \text{int } T$ tel que, pour tout $t \in I$, on a $\text{diamètre}(h_1(t \times T')) < \epsilon$, et $h_1(t \times T') \subset [t-\epsilon, t+\epsilon] \times T$.

Preuve de 4.6 (l'idée seulement). Elle est suggérée par les croquis suivants. \square



Par ce lemme, on rétrécit beaucoup de décompositions liées aux compacts de Whitehead. Soit, par exemple, $\omega \subset R^3$ un compact de Whitehead et $\mathcal{D} = \{t \times \omega \mid t \in I\}$ la décomposition $I \times \{\omega\}$ de $R \times R^3 = R^4$; alors, \mathcal{D} est rétrécissable par le lemme 4.6 appliqué aux tores solides T, T', T'', \dots d'intersection ω . Donc $R^4/\mathcal{D} \approx R^4$. Ensuite, par localisation de 4.2 (ou similairement), on a $(0, 1) \times (R^3/\{\omega\}) \approx (0, 1) \times R^3$; d'où :

FAIT CÉLÈBRE 4.7. $R \times (R^3/\{\omega\}) \approx R^4$.

C'est un résultat d'Andrews et Rubin [AnR] 1965, démontré à la suite des résultats analogues, mais beaucoup plus difficiles, de Bing [Bi₂] 1959, anachronisme curieux. Il y a une bonne explication ! Arnold Shapiro, à l'époque où il a réussi à retourner S^2 dans S^3 par une homotopie régulière, cf. [FrM], a également établi 4.7 ; en tout cas, Bing me signale que D. Montgomery lui a communiqué cette affirmation sans pouvoir lui-même l'appuyer que d'un argument bien plus facile (voir 4.8) montrant que $R \times (S^3 - \omega) \approx R^4$, cf. [Bi₃]. La preuve putative de Shapiro des années 50 a-t-elle disparu sans trace ?

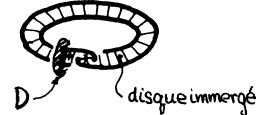
CONJECTURE DE POINCARÉ

Pour établir la platitude des disques $\{E(\alpha)\}$ construits en 3.9, nous aurons besoin aussi d'un lemme plus facile que 4.6 traitant encore du couple (T, T') de Whitehead. Soit D un disque méridien de T qui coupe T' transversalement en deux disques ainsi :



LEMME 4.8. Avec ces données, on peut trouver dans $R^1 \times T$ une 4-boule topologique B telle que $\text{int } B \supset I \times T'$ et que $B \cap (R^1 \times D)$ est une 3-boule équatoriale de B de la forme $(\text{intervalle}) \times D_0 \subset R^1 \times D$.

Preuve de 4.8. Elle n'a rien à faire avec la preuve de 4.6! On trouve B aisément à partir d'un 2-disque immergé dans T comme dans le croquis à droite (cf. 3.9). \square



Pour établir $(B^2 \times D^2)/\mathbb{w}_+ \approx B^2 \times D^2$, nous utilisons maintenant les constructions du §3.

4.9. La décomposition \mathbb{w} de $B^2 \times D^2$ est rétrécissable.

Preuve de 4.9. On applique 4.3, et 4.6 (ou 4.8 sans exploiter la dernière condition de 4.8). Pour ceci, il convient de remarquer d'abord que pour tout ouvert \mathbb{w} -saturé U de $B^2 \times D^2$, $W \cap U$ est contenu dans un ouvert $\subset U$ qui est une réunion disjointe d'ouverts de la forme $\overset{\circ}{I}' \times \overset{\circ}{T}'(a_1, \dots, a_k)$, où I' est un intervalle. \square

Notre prochain but est la platitude des disques $E(\alpha) = qD(\alpha) \subset (B^2 \times D^2)/\mathbb{w}$. Soit $\mathbb{w}(\alpha) = \{\omega \in \mathbb{w} \mid \omega \cap D(\alpha) \neq \emptyset\}$, et soit $W(\alpha) = \bigcup \mathbb{w}(\alpha)$.

4.10 $\mathbb{w}(\alpha)$ est rétrécissable en respectant $D(\alpha)$; donc, le quotient $q_\alpha(D(\alpha))$ de $D(\alpha)$ est plat dans $(B^2 \times D^2)/\mathbb{w}(\alpha)$.

Preuve de 4.10. On applique le lemme 4.8 et le critère relatif 4.3. Pour tout ouvert \mathbb{w}_α -saturé U de $B^2 \times D^2$, l'intersection $W_\alpha \cap U$ est trivialement contenue dans un ouvert qui, pour un certain entier ℓ , est une réunion disjointe d'ouverts de la forme $\overset{\circ}{I}' \times \overset{\circ}{T}' \subset U$, où T' est une composante connexe d'un tore solide multiple $T_\ell(b_1, \dots, b_\ell)$ et I' est un intervalle.

La condition (d) de § 3.9 nous permet de choisir ces ensembles de sorte qu'en plus, pour chacun :

(*) $D(\alpha) \cap (I' \times T')$ est un seul 2-disque, lequel se projette sur un disque méridien D de T' qui en plus est une composante connexe de $D'(\alpha) \cap T'$, voir § 3.9.

Par la condition (b) de § 3.9, le disque méridien D coupe $T_{\ell+(1/6)} \cap T'$ idéalement, de sorte que le lemme 4.8 nous offre des 4-boules disjointes B_1, \dots, B_s dans $\overset{\circ}{I}' \times \overset{\circ}{T}'$, telles que

- (i) chaque intersection $B_i \cap D(\alpha)$ est un 2-disque diamétral et non noué dans B_i ,
- et (ii) $\overset{\circ}{B}_1 \cup \dots \cup \overset{\circ}{B}_s$ contient le compact $W^+ \cap (\overset{\circ}{I}' \times \overset{\circ}{T}') \supset W_\alpha \cap (\overset{\circ}{I}' \times \overset{\circ}{T}')$.

Pour tout compact K dans $\overset{\circ}{B}_i$ et tout $\varepsilon > 0$, on trouve aisément un homéomorphisme $h : B_i \rightarrow B_i$ à support compact qui respecte $\overset{\circ}{B}_i \cap D(\alpha)$ et tel que $\text{diam } h(K) < \varepsilon$. Le critère 4.3 (respectant $D(\alpha)$) est donc vérifié. \square

4.11. $qD(\alpha) = E(\alpha)$ est plat dans $(B^2 \times D^2)/\mathbb{w}$.

Preuve de 4.11. L'ouvert $U_\alpha = (B^2 \times D^2) - (W_\alpha \cup D(\alpha))$ est clairement homéomorphe

à $(B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathbb{w}_\alpha - q_\alpha D(\alpha)$ par q_α . Donc, par 4.2 et 4.2*, l'application quotient $q'_\alpha : (B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathbb{w}_\alpha \rightarrow (B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathbb{w}$ est approximable par homéomorphismes valant q'_α sur le disque plat $q_\alpha D(\alpha)$. Ainsi, $qD(\alpha) = q'(\alpha)q(\alpha)D(\alpha)$ est plat. \square

On propose maintenant de finir en montrant que les applications quotient :

$$(B^2 \times \overset{\circ}{D}^2) \approx (B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathbb{w} \xrightarrow{p_1} ((B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathbb{w})/\{E(\alpha)\} \xrightarrow{p_2} (B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathbb{s}_+$$

sont approximables par homéomorphismes.

4.12. p_1 est approximable par homéomorphismes.

Preuve de 4.12. 4.11, 4.5 et 4.4. \square

Pour approximer p_2 par homéomorphismes, il faut quelques préparatifs. D'après 4.12 et 4.9, il y a une application de rétrécissement $r : B^2 \times \overset{\circ}{D}^2 \rightarrow B^2 \times \overset{\circ}{D}^2$ induisant la même décomposition que l'application quotient vers $((B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathbb{w})/\{E(\alpha)\}$; on se permet d'identifier cet espace (le domaine de p_2) à $B^2 \times \overset{\circ}{D}^2$ par r .

La décomposition \mathcal{P} constituée des préimages $p_2^{-1}(y) \neq (\text{point})$ est la collection dénombrable des quotients naturels des composantes connexes des trous $T_*(\alpha)$ et B_* , qui s'identifient maintenant à $rT_*(\alpha)$ et $rB_* \subset B^2 \times \overset{\circ}{D}^2$. On constate que \mathcal{P} est évanescente.

L'application quotient $\lambda B^2 \times \mu D^2 = B_* \rightarrow rB_*$ rétrécit exactement les compacts de Whitehead $\mathbb{w}(\partial B_*) = \{\omega \in \mathbb{w} \mid \omega \subset B_*\}$, et ces compacts habitent $\lambda B^2 \times \mu \partial D^2 \subset \partial B_*$.

4.13. $r\partial B_*$ admet un voisinage en bicollier V dans $B^2 \times \overset{\circ}{D}^2$, c'est-à-dire $(V, r\partial B_*) \approx (R^1, 0) \times r\partial B_*$. Ceci découlera de :

4.14. Le quotient de ∂B_* dans $(B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathbb{w}(\partial B_*)$ admet un voisinage en bicollier.

Preuve de 4.14. Ceci équivaut à l'existence d'un voisinage en bicollier du quotient de $0 \times \partial B_*$ dans $(R^1 \times \partial B_*)/(0 \times \mathbb{w}(\partial B_*))$. Or, par 4.7 (légèrement généralisé) et 4.2 plus 4.2*, l'application quotient de ce dernier espace sur $(R^1 \times \partial B_*)/(R^1 \times \mathbb{w}(\partial B_*))$ peut être approximé par des homéomorphismes, en fixant le quotient de $0 \times \partial B_*$. \square

Preuve de 4.13. L'application r se factorise en $r''r'$ où r' divise par $\mathbb{w}(\partial B_*)$. Or, 4.14 assure un voisinage en bicollier de $r'(\partial B_*)$ dans $(B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathbb{w}(\partial B_*)$. Ensuite, 4.2 et 4.2* assurent que r'' est approximable par des homéomorphismes, en fixant $r'(\partial B_*)$; ainsi, le couple $((B^2 \times \overset{\circ}{D}^2)/\mathbb{w}(\partial B_*), r'(\partial B_*))$ (avec le bicollier !) est homéomorphe à $(B^2 \times \overset{\circ}{D}^2, r\partial B_*)$. \square

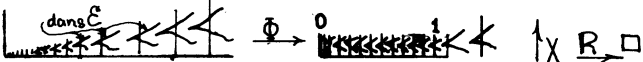
4.15. $\mathcal{R}(B^2 \times \overset{\circ}{D}^2, rB_*; \mathcal{P})$ est vérifié.

Preuve de 4.15. Donné un voisinage ouvert U de rB_* , il existe, par 4.13, un homéomorphisme h de $B^2 \times \overset{\circ}{D}^2$ à support compact dans un bicollier V de $r\partial B_*$ dans U , tel que $h(rB_*) \subset r\overset{\circ}{B}_*$. Puisque $r\overset{\circ}{B}_* \approx R^4$, il existe une application g à support dans $r\overset{\circ}{B}_*$ et approximable par homéomorphismes telle que $g(hrB_*) = (\text{point}) \in r\overset{\circ}{B}_*$. Soit $f = gh : B^2 \times \overset{\circ}{D}^2 \rightarrow B^2 \times \overset{\circ}{D}^2$. Par continuité uniforme sur le support compact $F \in rB_* \cup V$ de f , on sait que, pour $\epsilon > 0$ donné, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout ensemble $E \subset B^2 \times \overset{\circ}{D}^2$ de diamètre $< \delta$, le diamètre de $f(E)$ est $< \epsilon$. Par le lemme suivant 4.16, il existe un homéomorphisme d'étirement θ de $B^2 \times \overset{\circ}{D}^2$ fixant rB_* et à support dans V

CONJECTURE DE POINCARÉ

tel que, pour tout $P \in \mathcal{P}$ distinct de B_* tel que $\partial P \cap F \neq \emptyset$, on a $\text{diam } \partial P < \delta$. Alors, $f = f_0 \circ \theta$ établit $\mathcal{R}(B^2 \times D^2, B_*; \mathcal{P})$. \square

LEMME D'ÉTIREMENT 4.16. Soit \mathcal{E} une décomposition évanescente de $X \times [0, \infty)$ où X est compact et tout élément de \mathcal{E} est disjoint de $X \times 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un homéomorphisme à support compact φ de $[0, \infty)$ tel que $\Phi = \varphi \times \text{id}|_X$ vérifie : pour tout $E \in \mathcal{E}$, tel que $\Phi(E) \cap (X \times [0, 1]) \neq \emptyset$, on a $\text{diam } \Phi(E) < \varepsilon$.

Preuve de 4.16 (indication). 

Tout élément de \mathcal{P} distinct de rB_* est de la forme $rT_*^1(\alpha)$ où $T_*^1(\alpha)$ est une composante connexe d'un trou $T_*(\alpha)$. En suivant la méthode de preuve de 4.15, on établit similairement :

4.17. $\mathcal{R}(B^2 \times D^2, rT_*^1(\alpha); \mathcal{P})$ est vérifié. \square

Preuve de 4.17 (indications). Le quotient de $T_*^1(\alpha) = J(\alpha) \times T^1(\alpha)$, par la longueur $\ell(\alpha)$ qui est dans $D(\alpha)$, est un cône dont le centre est le quotient de $\ell(\alpha)$, et la base est un tore solide. $\partial rT_*^1(\alpha) - r\ell(\alpha)$ a un voisinage en bicollier dans $B^2 \times D^2$, cf. 4.12. Les points d'accumulation des éléments $P \neq (\text{point})$ de \mathcal{P} sont le "centre" $r\ell(\alpha)$ et un compact $r(W \cap \partial T_*^1(\alpha))$ loin de $r\ell(\alpha)$. \square

4.18. p_2 est approximable par homéomorphismes ; donc $B^2 \times D^2 / \mathfrak{d}_+ \approx B^2 \times D^2$.

Preuve de 4.18. On applique 4.17, 4.15 et 4.4. \square

§ 5. - LE THÉORÈME D'APPROXIMATION DE FREEDMAN

Du point de vue technique (et historique), le résultat suivant (appliqué à S^4) constitue la clef de voûte de cet exposé.

THÉORÈME D'APPROXIMATION DE FREEDMAN 5.1.

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue et surjective entre deux n -sphères $X \approx Y \approx S^n$ telle que l'ensemble singulier $S(f) = \{y \in Y ; f^{-1}(y) \neq \text{un point}\}$ est nulle part dense et au plus dénombrable. Alors, f est approximable par homéomorphismes.

Remarque. Pour toute dimension $\neq 4$, il existe des théorèmes d'approximation par homéomorphismes bien plus forts $[Ar] [Si_1] [Ed_2]$; ainsi, en dimension 4, le problème de généraliser 5.1 est assez nettement posé.

Dans le cas où $S(f)$ est fini, ce théorème est bien connu puisqu'il constitue l'essentiel d'une preuve du célèbre théorème dit de Schöenflies qui fut établi vers 1960 par B. Mazur, M. Brown et M. Morse.

Rappelons qu'un compact A dans une n -variété topologique M^n sans bord est cellulaire si chaque voisinage de A contient un voisinage qui est homéomorphe à la boule B^n .

LEMME FACILE 5.2 (cf. critère de Bing 4.1, $[Br_1]$).

Soit A un compact cellulaire dans l'intérieur $\text{int } M^n$ d'une variété M^n . Alors, l'application quotient $q : M^n \rightarrow M^n / \{A = \text{point}\}$ est approximable par des homéomorphismes qui coïncident d'ailleurs avec q hors d'un voisinage arbitraire donné de A . \square

Une preuve directe rétrécit A progressivement en un point.

Preuve de 5.1 si $S(f) = \{\text{un point}\}$. Posant $y_0 = S(f)$ et $A = f^{-1}(y_0)$, on a $X - A \approx R^n$. Puisque $X \approx S^n$, il suit que A est cellulaire dans X (exercice). Alors, on obtient l'approximation en appliquant 5.2. \square

Dans l'ordre des idées de Freedman, le cas où $S(f)$ est n points, $n \geq 2$, est déjà aussi difficile que 5.1. Mais on peut consulter $[Br_1] [Do]$ pour une preuve facile.

Rappelons le

THÉORÈME DE SCHOENFLIES 5.3. Soit Σ^{n-1} une $(n-1)$ -sphère topologiquement plongée dans la n -sphère S^n de façon qu'il existe un voisinage en bicollier N de Σ dans S^n ; i.e. $(N, \Sigma) \approx \Sigma \times ([-1, 1], 0)$. Alors, l'adhérence de chacune des deux composantes de $S^n - \Sigma$ est homéomorphe à la n -boule B^n .

Preuve de 5.3 (à partir de 5.1 pour $S(f) = \{2 \text{ points}\}$). Soient X_1, X_2 les deux

composantes connexes de $S^n - \overset{\circ}{N}$, et W_1, W_2 les adhérences des composantes connexes de $S^n - \Sigma^{n-1}$ contenant respectivement X_1, X_2 . Il s'agit de montrer que $W_1 \approx B^n \approx W_2$.

En châturant X_1 et X_2 , on obtient une application quotient :

$$f : S^n \rightarrow S^n / \{X_1, X_2\} \approx (\Sigma \times [-1, 1]) / (\Sigma \times 0, \Sigma \times 1) \approx S^n$$

qui est approximable par homéomorphismes selon 5.1 (le cas où $S(f) = 2$ points). Donc X_1 et X_2 sont cellulaires dans S^n .

Appliquant le lemme 5.2 à $X_i \subset \overset{\circ}{W}_i$, on déduit que :

$$W_i \rightarrow W_i / X_i \approx \Sigma \times [0, 1] / (\Sigma \times 1) \approx B^n$$

est approximable par homéomorphismes. \square

Observation. Le cas de 5.3, où on sait d'avance que Σ borde une n -boule dans S^n , découle déjà du cas de 5.1 où $S(f) = (1 \text{ point})$ prouvé ci-dessus. Freedman utilise ce cas.

Pour démontrer 5.1, Freedman a introduit une belle astuce de réplication itérée de l'application à approximer, qui me rappelle vaguement les arguments de Mazur [Maz]. Cette astuce nous amène à sortir de la catégorie des applications continues dans celle moins familière des relations fermées. C'est pendant les années 70 que les relations fermées se sont imposées pour la première fois dans la topologie géométrique ; elles ont fait surface implicitement dans un article très original de M.A. Stanko [Stn] pour se rendre essentielles depuis : je crois que ce serait une tâche herculéenne de démontrer sans les relations fermées le théorème ultérieur d'Ance & Cannon [AnC] que tout plongement topologique $S^{n-1} \rightarrow S^n$, $n \geq 5$, peut être approximé par des plongements localement plats.

Définitions. Une relation fermée $R : X \rightarrow Y$, entre espaces (métrisables) X et Y , est un sous-ensemble fermé R de $X \times Y$. Si $S : Y \rightarrow Z$ est une relation fermée, la composition $SR : X \rightarrow Z$ est $\{(x, y) \mid \exists y, (x, y) \in R, (y, z) \in S\} \subset X \times Z$, qui est également fermée si Y est compact. Les relations fermées entre espaces compacts constituent ainsi une catégorie.

Une application continue $f : X \rightarrow Y$ donne une relation fermée $\{(x, f(x)) ; x \in X\}$ (son graphe !) que nous appelons encore f . Réciproquement, pourvu que Y soit compact, une relation fermée $R : X \rightarrow Y$ est le graphe d'une fonction continue dès qu'elle est univoque en ce sens que, pour tout $x \in X$, $R \cap (x \times Y) = (\text{un point})$. Avertissement : la fonction naturelle $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est continue et bijective ; son inverse est discontinue, mais le graphe des deux est fermé.

Par extension des notions habituelles pour les applications continues, on a pour $A \subset X$ et $B \subset Y$: l'image $R(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A, (x, y) \in R\}$,

la restriction $R|_A : A \rightarrow Y$ qui est le fermé $R \cap (A \times Y)$ dans $A \times Y$,

l'inverse $R^{-1} : Y \rightarrow X$ qui est $\{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$;

Avertissement : R^{-1} est l'inverse de R au sens catégorique $\Leftrightarrow R$ est le graphe d'une fonction bijective \Leftrightarrow l'inverse catégorique existe.

Pour exploiter l'analogie entre une fonction $X \rightarrow Y$ et une relation $R : X \rightarrow Y$, nous avons à tout moment le droit d'assimiler R à la fonction qui associe à tout point $x \in X$

le sous-ensemble $R(x) \subset Y$.

Preuve du théorème d'approximation 5.1.

Toute sous-variété de codimension 0 qu'on introduit sera supposée être topologique et localement plate.

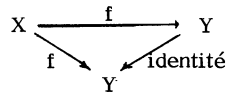
Soit N un voisinage de f dans $X \times Y$. Le théorème affirme qu'il existe un homéomorphisme $H: X \rightarrow Y$ tel que $H \subset N$.

En ôtant de Y un petit n -disque (boule) D de $Y - \overline{S(f)}$ et en ôtant sa préimage $f^{-1}D$ de X , on voit qu'il est admissible d'adopter le

CHANGEMENT DE DONNEES 5.4 (dans 5.1). On suppose dorénavant X et Y homéomorphes à B^n plutôt qu'à S^n et on suppose $S(f) \subset \text{int}Y$.

Le théorème changé entraîne facilement le théorème 5.1 original, à l'aide du cas spécial du théorème de Schönflies 5.3 où Σ^{n-1} borde une boule (voir observation sur 5.3).

La première démarche de la construction inductive de H est d'appliquer la proposition suivante au triangle



D'ailleurs, le voisinage N de la proposition devient le N ci-dessus ; et L devient Y .

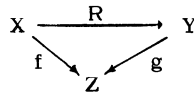
Une relation $R: X \rightarrow Y$ où $X \approx B^n \approx Y$ est bonne si elle est fermée, et que

(i) $R \subset X \times Y$ se projette surjectivement sur Y et sur X ,

(ii) $R(x) \neq \{\text{point}\}$ pour au plus un nombre dénombrable de points x dans X et ces points exceptionnels constituent un ensemble nulle part dense contenu dans $\text{int}X$. De même pour R^{-1} .

On dit qu'une bonne $R': X \rightarrow Y$ est plus fine que R si $R' \subset R \subset (X \times Y)$.

PROPOSITION 5.5. Soient donnés : un triangle (éventuellement commutatif) de bonnes relations



où $X \approx Y \approx Z \approx B^n$, et f, g sont en plus des applications ; un voisinage N de R dans $X \times Y$; et $L \subset Z$ un ouvert (appelé la lacune). On impose les conditions :

(a) $R \subset (f^{-1}\bar{L} \times g^{-1}\bar{L}) \cup (f^{-1}(Z - L) \times g^{-1}(Z - L))$; c'est inévitable si le triangle commute.

(b) $R = g^{-1}f$ sur $f^{-1}(\bar{L})$.

(c) R donne par intersection le graphe d'un homéomorphisme $f^{-1}(Z - L) \rightarrow g^{-1}(Z - L)$.

(d) Les ensembles singuliers $S(f)$ et $S(g)$ sont séparés sur L , c'est-à-dire qu'il existe deux ouverts disjoints U et V qui contiennent $S(f) \cap L$ et $S(g) \cap L$ respectivement.

Alors, pour tout $\epsilon > 0$, on peut modifier les trois données g, R, L en g_*, R_*, L_* de sorte qu'en plus des mêmes conditions ci-dessus (avec g_*, R_*, L_* à la place de g, R, L) ; on a $R_* = R$ sur $f^{-1}(Z - L)$, $L_* \subset L$, et pour tout $y \in Y$, diamètre $R_*^{-1}(y) < \epsilon$.

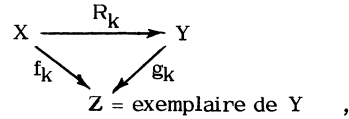
CONJECTURE DE POINCARÉ

COMPLÉMENT. Il existe alors un voisinage $N_* \subset N$ de R_* dans $X \times Y$ tel que, pour tout y dans Y , on a $\text{diam}(N_*^{-1}(y)) < \epsilon$.

Dédution du complément. Si le complément est faux, il existe deux suites de points de $X \times Y$, soient $(x_k, y_k), (x'_k, y'_k), k = 1, 2, 3, \dots$, convergentes au compact R_* et telles que $d(y_k, y'_k) \geq \epsilon$. Par compacité de $X \times Y$, on peut s'arranger pour qu'on ait convergence : $x_k \rightarrow x, y_k \rightarrow y, y'_k \rightarrow y'$. Alors, (x, y) et (x, y') appartiennent au compact R_* , mais $d(y, y') \geq \epsilon$, ce qui est une contradiction. \square

La proposition (avec son complément) sera utilisée comme une machine qui avale les données f, g, R, L, N, ϵ et en fabrique f, g_*, R_*, L_*, N_* .

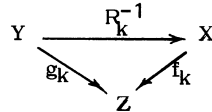
Continuons la construction de l'homéomorphisme H en supposant 5.5 prouvé. La k -ième démarche, $k \geq 1$, construit un triangle :



une sous-variété $L_k \subset Z$, et un voisinage N_k de R_k dans $X \times Y$ de sorte que f_k, g_k, R_k, L_k, N_k vérifient les conditions imposées à f, g, R, L, N dans la proposition. La première démarche est déjà spécifiée : 5.5 fabrique f_1, g_1, R_1, L_1, N_1 à partir de $f, \text{id}, Y, N, 1$.

Supposons le k -ième triangle spécifié pour définir le $(k+1)$ -ième.

(a) Si k est impair, 5.5 fabrique $g_{k+1}, f_{k+1}, R_{k+1}^{-1}, L_{k+1}, N_{k+1}^{-1}$ à partir de $g_k, f_k, L_k, N_k^{-1}, 1/k$. En résumé, on applique 5.5 au triangle renversé :



(b) Si k est pair, c'est comme la première démarche : 5.5 fabrique $f_{k+1}, g_{k+1}, R_{k+1}$, L_{k+1}, N_{k+1} à partir de $f_k, g_k, R_k, L_k, N_k, 1/k$.

On a (par récurrence) $N \supset N_1 \supset N_2 \supset \dots$, et on définit $H = \bigcap_k N_k$. Alors, H est un homéomorphisme puisque, pour tout x , on a :

$$\text{diam} H(x) \leq \text{diam} N_k(x) \leq 1/k, \text{ pour tout } k \text{ pair},$$

$$\text{et } \text{diam} H^{-1}(x) \leq \text{diam} N_k^{-1}(x) \leq 1/k, \text{ pour tout } k \text{ impair}.$$

Cet homéomorphisme H dans le voisinage donné N de f achève la preuve du théorème d'approximation 5.1 à partir de Proposition 5.5. \square

Preuve de la Proposition 5.5.

Pour dégager l'idée essentielle de Freedman, le lecteur devrait lire d'abord la preuve pour (re)démontrer qu'une surjection $f : B^n \rightarrow B^n$, telle que $S(f) = (\text{un point}) \subset \text{int} B^n$ est approximable par homéomorphismes (pour ceci, on pose $f = R$ et $g = \text{id}$). Puis, il

devrait remarquer que dès que $S(f) = (k \text{ points}) \subset \text{int } B^n$, le même argument nous amène à approximer f par des relations qui n'écrasent rien, mais qui éclatent $k(k-1)$ points.

Considérons les préimages $R^{-1}(y)$, $y \in Y$, de diamètre $\geq \epsilon$, qu'on veut en somme éliminer. Selon (a), (b) et (c), ces ensembles constituent la préimage par f de l'ensemble $(S_\epsilon(f) \cap L) \subset Z$, où $S_\epsilon(f) = \{z \in Z \mid \text{diam } f^{-1}(z) \geq \epsilon\}$, ce qui nous permettra de suivre l'affaire dans Z .

Remarquons que $S_\epsilon(f)$ est compact bien que, typiquement, $S(f)$ ne le soit pas. D'ailleurs, $S_\epsilon(f)$ est fini dans le cas qui intéresse Freedman (voir § 4).

LEMME DE POSITION GENERALE 5.6.

Dans l'intérieur d'une variété topologique compacte M , soient A et B deux ensembles dénombrables et nulle part denses. Alors, il existe un petit automorphisme θ de M fixant tout point de ∂M tel que $\theta(A)$ et B soient séparés, i.e. contenus dans des ouverts disjoints.

Preuve de 5.6. Considérons l'espace Aut des automorphismes de M fixant ∂M , muni de la métrique complète $\text{Sup}(d(f,g), d(f^{-1}, g^{-1}))$ où d est la métrique de la convergence uniforme. Dans Aut , l'ensemble des automorphismes θ , tels que les premiers k points A_k de A et B_k de B vérifient

$$\theta(A_k) \cap \bar{B} = \emptyset = \theta(\bar{A}) \cap B_k,$$

constitue un ouvert $U_k \subset \text{Aut}$ partout dense dans Aut , car \bar{A} et \bar{B} sont des fermés nulle part denses dans M . Alors, un théorème célèbre de Baire assure que l'intersection dénombrable $\bigcap_k U_k$ est partout dense dans Aut . Or, $\bigcap_k U_k$ est l'ensemble des θ dans Aut tel que $\theta(A) \cap \bar{B} = \emptyset = \theta(\bar{A}) \cap B$. Mais, pour X_1, X_2 dans un espace M métrisable, la condition $X_1 \cap \bar{X}_2 = \emptyset = \bar{X}_1 \cap X_2$ entraîne la séparation de X_1 et X_2 dans M ; en effet, vus dans l'ouvert $M - (\bar{X}_1 \cap \bar{X}_2)$ de M , les ensembles $\bar{X}_1 - (\bar{X}_1 \cap \bar{X}_2)$ et $(\bar{X}_1 \cap \bar{X}_2)$ sont toujours des fermés disjoints et donc séparés; la condition mentionnée assure qu'ils contiennent respectivement X_1 et X_2 . \square

AFFIRMATION 5.7 (triviale si $S_\epsilon(f)$ est fini!).

Il existe une réunion finie B_+ de n -boules disjointes dans L vérifiant les conditions suivantes : (i) $S_\epsilon(f) \cap L \subset B_+$; (ii) $S(g) \cap B_+ = \emptyset$;

(iii) Chaque composante connexe B'_+ de B_+ est petite en ce sens que $(f^{-1}B'_+) \times (g^{-1}B'_+) \subset N$, et standard en ce sens que $Z - \text{int } B'_+ \approx S^{n-1} \times [0, 1]$.

Preuve de l'affirmation 5.7. Identifions Z à $B^n \subset \mathbb{R}^n$ pour donner à L une structure (affine) linéaire. Soit K un voisinage compact du compact $S_\epsilon(f) \cap L$ qui est un sous-polyèdre de L et disjoint de $S(g)$, voir (c) de 5.6. On subdivise K en un complexe simplicial dont chaque simplex Δ est linéaire dans L et tellement petit que $f^{-1}(\Delta) \times g^{-1}(\Delta) \subset N$. Ensuite (cf. la preuve du lemme 5.6), par une petite perturbation (une translation si on veut!) de K dans L , on dégage du compact dénombrable $S_\epsilon(f)$ le $(n-1)$ -squelette $K^{(n-1)}$, sans nuire aux propriétés de K déjà établies. Finalement, B_+ se définit comme K moins un petit δ -voisinage ouvert de $K^{(n-1)}$ dans \mathbb{R}^n . Chaque composante B'_+ de B_+ est

CONJECTURE DE POINCARÉ

convexe et dans $\text{int } Z = \overset{\circ}{B}^n$; donc $Z - \overset{\circ}{B}_+^{-1} \approx S^{n-1} \times [0, 1]$, par un argument élémentaire. \square

Dans $\text{int } B_+$, nous choisissons maintenant une réunion B de boules (une dans chaque composante connexe de B_+), qui vérifie encore les mêmes conditions (i), (ii), (iii) et aussi (iv) $S(f) \cap \partial B = \emptyset$.

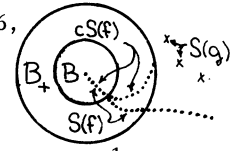
On pose $L_* = L - B$.

Pour chaque composante connexe B_+^i de B_+ nous modifions maintenant g et R au-dessus de B_+^i pour définir g_* et R_* . Ces changements pour les différentes composantes connexes B_+^i sont disjoints et indépendants. Donc, il suffit d'en spécifier un.

D'ailleurs, pour simplifier les notations, nous nous permettons de spécifier ce changement seulement dans le cas où B_+ est connexe.

Soit $c : Z \rightarrow B_+$ un homéomorphisme, dit de compression, qui fixe tout point de B . (Rappelons que $Z - \overset{\circ}{B} \approx S^{n-1} \times [0, 1] \approx B_+ - \overset{\circ}{B}$.) On doit modifier c en composant avec un homéomorphisme θ de $B_+ - \overset{\circ}{B}$ fixant $\partial B_+ \cup \partial B$ offert par le lemme 5.6, pour assurer que $S(f)$ et $cS(f)$ sont séparés sur l'ouvert $\overset{\circ}{B}_+ - B$.

Puisque $g^{-1}(E_+)$ est une boule dans Y (en effet, g est un homéomorphisme au-dessus de B_+), on peut choisir un homéomorphisme $i : X \rightarrow g^{-1}B_+$. On peut d'ailleurs choisir i de sorte que $i|_{\partial X}$ soit $g^{-1}cf|_{\partial X}$.



On pose :

$$g_* = \begin{cases} g & \text{sur } g^{-1}(Z - \overset{\circ}{B}_+) \\ cfi^{-1} & \text{sur } g^{-1}B_+ \end{cases} .$$

Sur $g^{-1}\partial B_+$, les deux règles tombent d'accord : $g = cf(g^{-1}cf)^{-1}$ sur $g^{-1}\partial B_+$.

On pose :

$$R_* = \begin{cases} R & \text{sur } f^{-1}(Z - \overset{\circ}{B}_+) \text{ et} \\ \text{plus fine que } g^{-1}f = (if^{-1}c^{-1})f & \text{sur } f^{-1}B_+ \end{cases} .$$

Plus précisément, sur $f^{-1}B_+$, on spécifie :

$$R_* = \begin{cases} (if^{-1}c^{-1})f & \text{sur } f^{-1}(B_+ - \overset{\circ}{B}) \\ i & \text{sur } f^{-1}B \end{cases} .$$

Sur $f^{-1}\partial B$ ces deux dernières règles tombent d'accord puisque c fixe tout point de ∂B , et $S(f) \cap \partial B = \emptyset$.

On a maintenant spécifié la modification L_* , g_* , R_* de L , g , R affirmée par la proposition. (N'oublions pas que si B_+ est k boules plutôt qu'une, la modification se fait en k démarches disjointes et indépendantes, chacune semblable à celle qu'on vient de spécifier pour B_+ connexe.)

La vérification des propriétés affirmées pour L_* , g_* , R_* est directe. (Il existe déjà des manuscrits [Fr] [An] qui offrent plus de détails.) \square

Remarque. Le système de formules ci-dessus, spécifiant g_* et R_* , cache de la géométrie. J'essaie maintenant de la révéler en regardant f et g respectivement comme des fibrés φ et γ , de base Z , et de fibre variable, ce qui me permet d'utiliser la notion de restriction de fibré. Soit $\gamma_0 = \gamma - (\gamma|_{\overset{\circ}{B}_+})$. On forme γ_* de $\varphi \amalg \gamma_0$ en identifiant par $c|_{\partial Z}$

les sous-fibrés (à fibres ponctuelles) $\varphi|_{\partial Z}$ et $\gamma_0|_{\partial B_+}$. Puis, on identifie l'espace total et la base de $\gamma_* = \varphi \cup \gamma_0$ à ceux de γ par une extension de $\gamma_0 \hookrightarrow \gamma$; plus précisément, on utilise $(\text{id}|_{(Z - B_+)} \cup c)$ entre les bases, qui est l'identité sur $B \subset B_+$. Alors, φ et $\gamma_* : Y \xrightarrow{g_*} Z$ sont des fibrés sur Z naturellement isomorphes sur $B \cup L$, ce qui définit une relation R_* plus fine que la simple correspondance de fibres $g_*^{-1}f$.

Remarque 2. Dans la preuve du théorème d'approximation, on peut facilement assurer que f_n et g_n convergent vers f_∞ et g_∞ , et que $g_\infty H = f_\infty$. Ainsi, en tant que fibrés, f_∞ et g_∞ sont isomorphes; d'ailleurs chaque fibre de f_∞ ou g_∞ est homéomorphe à une fibre de f . Je signale que f_∞ et g_∞ me rappellent les deux produits infinis de Mazur [Maz] et que H me rappelle le fameux "Eilenberg-Mazur swindle" qui boucle la preuve de 5.3 (affaibli) dans [Maz].

Remarque 3 (suite de 2). Si on veut éviter des complications inutiles dans la structure de f_∞ et g_∞ , on doit remarquer que dans la définition de g_* ci-dessus, on a le droit de remplacer l'application f qui apparaît là par une quelconque bonne application $f' : X \rightarrow Y$ telle que $f = f'$ sur $f^{-1}B$. Alors, pour toute utilisation de 5.5 dans la preuve de 5.1, on constate qu'on a la possibilité de choisir pour l'alternative f' toujours une application isomorphe à l'application f donnée en 5.1. Avec ce petit raffinement, la preuve de 5.1 dans le cas $S(f) = (2 \text{ points})$ est proche de l'argument de [Maz], en particulier $\overline{S(f_\infty)}$ et $\overline{S(g_\infty)}$ peuvent être homéomorphes à $\mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [Anc] F. ANCEL, Nowhere dense tame 0-dimensional decompositions of S^4 ; an exposition of a theorem of Mike Freedman, manuscript 1981, cf. [Anc*] below.
- [AnC] F. ANCEL and J. CANNON, Locally flat approximation of cell-like embedding relations, *Ann. of Math.* 109 (1979), 61-86.
- [AnR] J.J. ANDREWS and L.R. RUBIN, Some spaces whose product with E^1 is E^4 , *Bull. Amer. Math. Soc.* 71 (1965), 675-677.
- [Ar] S. ARMENTROUT, Cellular decompositions of 3-manifolds that yield 3-manifolds, *Memoirs Amer. Math. Soc.* 107 (1970).
- [ArB] S. ARMENTROUT and R.H. BING, A toroidal decomposition of E^3 , *Fund. Math.* 60 (1967), 81-87.
- [Bi₁] R.H. BING, A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres, *Ann. of Math.* 56 (1952), 354-362.
- [Bi₂] R.H. BING, Upper semicontinuous decompositions of E^3 , *Ann. of Math.* 65 (1957), 363-374.
- [Bi₃] R.H. BING, The cartesian product of a certain non manifold and a line is E^4 , *Ann. of Math.* 70 (1959), 399-412.
- [Bi₄] R.H. BING, Decompositions of E^3 , pages 5-12 in *Topology of 3-manifolds*, editor M.K. Fort, Prentice-Hall, 1962.

CONJECTURE DE POINCARÉ

- [Br] W. BROWDER, Surgery on simply-connected manifolds,
Ergebnisse der Math. Band 65, Springer 1972.
- [Br₁] M. BROWN, A proof of the generalized Schoenflies theorem,
Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 74-76.
- [Br₂] M. BROWN, Locally flat embeddings of topological manifolds,
Ann. of Math. 75 (1962), 331-342 ; also Topology of 3-manifolds,
Prentice-Hall (1962).
- [CaF] A. CASSON and M. FREEDMAN, Atomic surgery problems,
Preprint U.C. San Diego, 1978-79.
- [CaG] A. CASSON, Three lectures on new infinite constructions in 4-dimensional
manifolds, Notes prepared by L. Guillou, Prépublications Orsay 81 T 06.
- [Ch] T. CHAPMAN, Lectures on Hilbert cube manifolds, Regional conference,
series n° 28, Amer. Math. Soc. 1976.
- [Do] A. DOUADY, Plongement de sphères [d'après Mazur et Brown] ,
Séminaire Bourbaki (1960-61), exposé n° 205, Benjamin, New-York.
- [Edw₁] R.D. EDWARDS, Dimension theory, pages 195-211 in Geometric topology,
Proceedings Park City Utah Conf. 1974, Springer lecture notes 438 (1975).
- [Edw₂] R.D. EDWARDS, Approximating certain cell-like maps by homeomorphisms,
Manuscript, July 1977 (voir [Lat]).
- [Edw₃] R.D. EDWARDS, Characterizing infinite dimensional manifolds [after T.Torunczyk]
Sém. Bourbaki (1978-79), n° 540.
- [FrM] G. FRANCIS and B. MORIN, Arnold Shapiro's eversion of the sphere,
Math. Intelligencer 2 (1980), 200-203.
- [Fr₁] M.H. FREEDMAN, A fake $S^3 \times R$, Ann. of Math. 110 (1979), 177-201.
- [Fr₂] M.H. FREEDMAN, A surgery sequence in dimension 4, the relations with knot
theory, Inventiones Math. 1982.
- [Fr₃] M.H. FREEDMAN, The topology of 4-dimensional manifolds, preprint , Mar. 1982,
Univ. of Calif. San Diego ; to appear in J. of Differential Geometry, 1982.
- [KeM] M. KERVAIRE and J. MILNOR, Groups of homotopy spheres, I,
Ann. of Math. 77 (1963), 504-537.
- [KiS] R. KIRBY and L.C. SIEBENMANN, Foundational essays on topological manifolds,
smoothings and triangulations, Ann. of Math. Studies 88, Princeton
University Press, 1977.
- [Lat] F. LATOUR, Double suspension d'une sphère d'homologie [d'après R.D.Edwards]
Sémin. Bourbaki (1977-78), exposé n° 515.
- [Man] R. MANDELBAUM, Four-dimensional topology, Bull. Amer. Math. Soc. 2
(1980), 1-160.
- [MV] A. MARIN and Y.M. VISETTI, A general proof for Bing's shrinkability criterion
Proc. Amer. Math. Soc. 53 (1975), 501-507.

L. SIEBENMANN

- [Maz] B. MAZUR, On embeddings of spheres, *Bull. Amer. Math. Soc.* 65 (1959), 59-65.
- [Mi₁] J. MILNOR, On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, *Ann. of Math.* 64 (1956), 399-405.
- [Mi₂] J. MILNOR, Lectures on the h -cobordism theorem, Princeton Mathematical Notes, 1965.
- [MiH] J. MILNOR and J. HUSEMOLLER, Symmetric bilinear forms, Springer 1973.
- [Mor] C. MORLET, Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney, *H. Cartan 1961/62 exposés 4 - 7*, Secrétariat Math., Paris, 1964.
- [Poi₁] H. POINCARÉ, Second complément à l'analysis situs, *Proc. London Math. Soc.* 32 (1900), 277-308 (voir fin).
- [Poi₂] H. POINCARÉ, Cinquième complément à l'analysis situs, *Rendiconti del Circolo Mat. Palermo* 18 (1904), 45-110, et *Oeuvres VI*, pages 439-498 (voir début et fin).
- [Si₁] L.C. SIEBENMANN, Infinite simple homotopy types, *Indag. math.* 32 (1970), 479-495.
- [Si₂] L.C. SIEBENMANN, Approximating cellular maps by homeomorphisms, *Notices Amer. Math. Soc.* 17 (1970), p. 532, and *Topology* 11 (1973).
- [Si₃] L.C. SIEBENMANN, Deformation of homeomorphisms on stratified sets, *Comment. Math. Helv.* 47 (1972), 123-163. Note errata in §6,25, p. 158 : on line 10, N becomes B ; on lines 23,24,25 \mathfrak{F}_2^1 becomes \mathfrak{F}_2^t .
- [Si₄] L.C. SIEBENMANN, Amorces de la chirurgie en dimension 4, un $S^3 \times R$ exotique (d'après A. Casson et M.H. Freedman), *Sém. Bourbaki* (1978-79), n° 536.
- [Sm] S. SMALE, Generalized Poincaré's conjecture in dimensions > 4 , *Ann. of Math.* 74 (1961), 391-466.
- [Stn] M.A. STANKO, Approximation of imbeddings of compacta in codimension greater than two, *Dokl. Akad. Nauk. USSR* 198 (1971), 783-786 (russian), English translation, *Soviet. Math. Dokl.* 12 (1971), 906-909.
- [Tor] H. TORUNCZYK, Characterizing Hilbert space topology, Preprint 143, Institute of Math., Polish Academy of Sciences, 1978.
- [Wa] C.T.C. WALL, On simply connected 4-manifolds, *Proc. London Math. Soc.* 39 (1964), 141-149.
- [Wh₁] J.H.C. WHITEHEAD, Certain theorems about three-dimensional manifolds, I, *Quart. J. Math.* 5 (1935), 308-320.
- [Wh₂] J.H.C. WHITEHEAD, A certain open manifold whose group is unity, *Quart. J. Math.* 6 (1935), 268-279.
- [Anc*] F. ANCEL, A tame 0-dimensional cell-like map of S^4 with a bald spot is approximable by homeomorphisms, manuscript in preparation (June 1982)

L.C. SIEBENMANN
 Université Paris-Sud
 Mathématiques, bâtiment 425
 F-91405 ORSAY cedex