New York University
A private university in the public service

Courant Institute of Mathematical Sciences

251 Mercer Street
New York, N.Y. 10012
Telephone: (212) 460-7100

le 22 février '87.

Cher Yves,

Comment vas-tu ? Il y a longtemps que je voulais t'écrire, et j'ai un peu honte d'avoir attendu si longtemps. Mais voilà enfin de mes nouvelles..

Ann Arbor nous a fait, à Robert et moi, deux offres de "associate professorships" ("with tenure"). Ils m'ont dit qu'ils étaient fort impressionnés par ta lettre de recommendation, pour laquelle je voudrais encore te remercier. D'autre part, Bell Laboratories aussi m'a fait une offre (Robert y travaille déjà). Il nous faut décider avant le 1er mars (encore une semaine...). Si j'étais la seule à décider, je crois que je pencherais plutôt vers Ann Arbor: j'aime beaucoup l'endroit, et c'est une bonne université. J'y apprendrais beaucoup plus de math, aussi. D'autre part, Robert est vraiment plus attaché à Bell Labs que je ne croyais (et qu'il ne croyait lui-même d'ailleurs), et, comme je répugne de commencer notre mariage en le séparant de Bell alors qu'il s'y plaît, nous opterons probablement pour la solution Bell. Je crois d'ailleurs que je me plairai beaucoup à Bell aussi : il y a de très bons mathématiciens là aussi, et ils laissent une grande liberté à leurs chercheurs. Tu avais dit que, si nous allions à Ann Arbor, tu viendrais nous rendre visite, Robert et moi et les petits. J'espère que tu viendras aussi nous voir si nous prenons la voie Bell ! Je crois que tu trouverais certains des mathématiciens intéressants (Andrew Odlyzko, Ron Graham, Larry Shepp }, Jeff Lagarias, Neil Sloane, ..). Eux aussi étaient fort impressionnés par ta recommendation ... Merci de m'avoir ouvert ces portes !

En attendant de décider tout à fait définitivement (ce qui sera fait cette semaine), j'ai enfin terminé le gros papier-frames (dont j'avais vraiment marre à la fin), et je me suis remis aux ondelettes. L'arrivée du papier de Stéphane Mallat, que je trouve très beau, m'a amené a réfléchir sur les bases orthonormales d'ondelettes. Je me demandais aussi si un algorithme en "pyramide" comme dans le papier de Mallat, nécessairement devait reposer sur une base d'ondelettes. J'en ai discuté avec des "vision"-people ici, et ils semblent penser qu'une propriété d'orthogonalité des sous-espaces de $l^2(\mathbb{Z})$, qui alors impose l'existence d'une base orthonormale d'ondelettes sous-jacent la "pyramide", est essentielle. Tout cela m'a aussi mené à la construction de bases orthonormales d'ondelettes à support compact. (Voilà que moi, qui étais toujours dans

New York University
A private university in the public service

Courant Institute of Mathematical Sciences

251 Mercer Street
New York, N.Y. 10012
Telephone: (212) 460-7100

les frames, je sombre dans l'orthonormal aussi !) Elles existent, mais les exemples que j'ai trouvé ont une drôle de gueule.

L'idée est la suivante.

Essayons de construire des suites $f(n)$, $g(n)$ telles que

$$(1) \qquad \sum_k f(n-2k)\, f^*(\ell-2k) + g(n-2k)\, g^*(\ell-2k) = \delta_{n\ell}\,.$$

(au fond, c'est tout ce qui est nécessaire pour qu'une "pyramide" de décomposition + reconstruction de $\ell^2(\mathbb{Z})$ marche).

On peut alors définir $G, F : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$

par
$$(Fc)_k = \sum_n f(n-2k)\, c_n$$
$$(Gc)_k = \sum_n g(n-2k)\, c_n\,.$$

Alors $F^* F + G^* G = 1$, et on a

$$(F^*)^N F^N + \sum_{j=1} F^{*N-j}\, G^* G\, F^{N-j} = 1\,,$$

c.à.d. une décomposition + reconstruction avec algorithme en pyramide de $\ell^2(\mathbb{Z})$. En pratique, on choisira f, g réels.

Il paraît raisonnable (mais non pas nécessaire) de se restreindre au cas où

$$F^* \ell^2(\mathbb{Z}) \perp G^* \ell^2(\mathbb{Z})$$

(il est clair que la somme des 2 espaces est ℓ^2 dans tous les cas). Cela mènerait (d'après l'intuition des vision people) à une plus grande "data compaction" que le cas non-orthogonal. On impose donc

(2) $$\sum_n f(n-2k)\, g^*(n-2\ell) = 0.$$

Toutes ces conditions sont évidemment satisfaites si les f, g sont obtenus à partir d'une base d'ondelettes. D'autre part, si

(3) $$\sum_n f(n) = \sqrt{2} \qquad \sum_n g(n) = 0,$$

(ces 2 conditions sont équivalentes si on a toutes les autres), ~~alors~~ et si

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n f(n)\, e^{in\xi}$$

satisfait que

$$\prod_{j=1}^{\infty} F(2^{-j}\xi) \in L^2(\mathbb{R}),$$

alors on a une base d'ondelettes associées:

$$\hat{\phi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} F(2^{-j}\xi), \qquad \psi(x) = \sum_k g(k)\sqrt{2}\,\phi(2x-k)$$

$$\langle \phi_{-1\,k}, \phi_{0\,n} \rangle = f(n-2k)$$

$$\langle \psi_{-1\,k}, \phi_{0\,n} \rangle = g(n-2k).$$

Si on ~~se restreint~~ impose, au départ, que les suites $f(n), g(n)$ n'ont qu'un nombre fini de termes non-nuls, alors les ψ, ϕ associés auront un support compact (F, et par conséquent $\prod_{j=1}^{\infty} F(2^{-j}\xi)$, est, dans ce cas-là, ~~expo~~ entier de type exponentiel)

New York University
A private university in the public service

Courant Institute of Mathematical Sciences

251 Mercer Street
New York, N.Y. 10012
Telephone: (212) 460-7100

Il s'agit donc de trouver des f, g satisfaisant toutes les conditions.

Si on définit

$$f(2n) = a(n) \qquad g(2n) = c(n)$$
$$f(2n+1) = b(n) \qquad g(2n+1) = d(n)$$

et des matrices Toeplitz A, B, C, D (infinies des 2 côtés) par $A_{nk} = a(n-k), \ldots$, et des fonctions entières (puisque un nombre fini seulement des $a, b \ldots$ est $\neq 0$) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par $\alpha(x) = \sum_n a(n) e^{inx}, \ldots$, alors les conditions deviennent

$$(1) \leftrightarrow (1') \left\{ \begin{array}{l} A^*A + C^*C = 1 \\ B^*B + D^*D = 1 \\ A^*B + C^*D = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} |\alpha(x)|^2 + |\gamma(x)|^2 = 1 \\ |\beta(x)|^2 + |\delta(x)|^2 = 1. \\ \overline{\alpha(x)}\,\beta(x) + \overline{\gamma(x)}\,\delta(x) = 0. \end{array} \right.$$

$$(2) \leftrightarrow (2') \quad A^*C + B^*D = 0 \quad \text{ou} \quad \overline{\alpha(x)}\,\gamma(x) + \overline{\beta(x)}\,\delta(x) = 0.$$

Une conséquence de ces 2 dernières éq. est (cela se voit le mieux du côté $\alpha, \beta, \gamma, \delta$)

$$|\beta(x)|^2 = |\gamma(x)|^2 \quad \text{ou} \quad B^*B = C^*C$$

et donc

$$|\alpha(x)|^2 = |\delta(x)|^2 \quad \text{ou} \quad A^*A = D^*D.$$

Soient n_a, n_b, n_c, n_d la largeur de la bande diagonale en dehors de laquelle les matrices Toeplitz A, B, C, D sont nulles. Alors, puisque $B^*B = C^*C$, $A^*A = D^*D$,

$$n_b = n_c$$
$$n_a = n_d$$

et, ~~sauf~~ si tous les $n_a, n_b, n_c, n_d \neq 0$,

$$n_a = n_c \qquad n_b = n_d.$$

(ceci parce que la largeur de $B^*B = 2n_b \mp 1$, celle de $D^*D = 2n_d \mp 1$, et $B^*B + D^*D = 1$). On a donc

$$n_a = n_b = n_c = n_d .$$

Supposons qu'il existe des ondelettes associées aux f, g. Supposons que ϕ soit symmétrique autour de 0 (comme dans tous les cas intéressants jusqu'à présent). Alors $f(n)$ est symmétrique autour de 0 : $f(-n) = f(n)$. Si il y a un nombre fini de $f(n)$ nonnuls, cela implique

$$n_a \neq n_b$$

~~($n_a + n_b$ est le nombre~~
($n_a + n_b$ est nécessairement impair dans ce cas-ci)

Il n'y a donc pas de bases orthonormales d'ondelettes ~~symmet~~ à support compact avec ϕ, de support compact et symétrique autour de 0.

Dans le cas de la base de Haar, ϕ est symétrique autour de $1/2$. La symétrie autour de 0 étant exclue, qu'en est-il pour la symétrie autour de $1/2$? Ceci mène à

$$f(n+1) = f(-n)$$

ou

$$C = A^* \qquad \text{(supposons les } f \text{ réels)}$$

Mais alors $\quad 2A^*A = 1 \quad$, ce qui implique

$$n_a = 1$$

L'unique solution (à des permutations et des "shifts" près) est alors

$$A = C = \frac{1}{\sqrt{2}} 1 .$$

$$B = -D = \frac{1}{\sqrt{2}} 1 ,$$

ce qui correspond à la base de Haar. Il n'y a pas d'autres base orthonormale d'ondelettes à support compact

New York University
A private university in the public service

Courant Institute of Mathematical Sciences

251 Mercer Street
New York, N.Y. 10012
Telephone: (212) 460-7100

associées à une fonction ϕ de support compact, symétrique autour de $1/2$, que la base de Haar.

Si on laisse tomber l'idée de symétrie, par contre, il y a des exemples non triviaux.

Pour ~~$~~ $n_a = n_b = n_c = n_d = 1$, par exemple, on trouve que, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, les matrices

$$A = N^{-1} (\lambda\mu + U)$$
$$B = N^{-1} (\lambda - \mu U)$$
$$C = N^{-1} (\mu - \lambda U)$$
$$D = N^{-1} (1 + \lambda\mu U),$$

où $N = [(1+\lambda^2)(1+\mu^2)]^{1/2}$, et où U est la matrice "shift", $U_{nk} = \delta_{n-k+1}$, satisfont les équations (1'), (2').

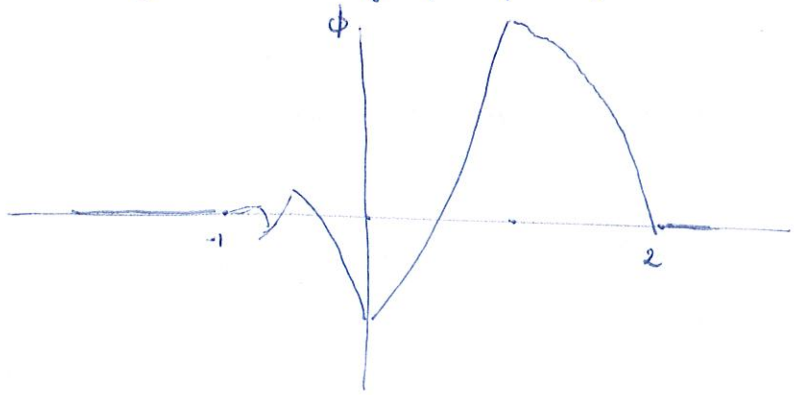
Si on impose en plus (3), alors $\mu = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$, et

$$\hat{\phi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} \left[\cancel{[illegible]}\, F(2^{-j}\xi) \right]$$ ~~[illegible]~~ converge, et est dans $L^2(\mathbb{R})$, où

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\lambda^2)} \left[\lambda(\lambda-1) + \lambda(\lambda+1)e^{i\xi} + (\lambda+1)e^{2i\xi} \cancel{+} - (\lambda-1)e^{3i\xi} \right]$$

La fonction ϕ a ~~un~~ comme support l'intervalle $[0,3]$ (ou $[-1,2]$ si on fait un "shift"). En général elle a une drôle de gueule. Pour $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}$, $\hat{\phi}$ décroît plus vite que $(1+|\xi|)^{-(1+\varepsilon)}$, et ϕ est donc continue.

Si on fait un graphique, on a



Les "pentes" de ϕ ont des petites bosses; le tout a une allure très fractale. C'est joli, non, l'ondelette fractale!

Si on passe à $n_a = 2$, one arrive à trouver des ϕ sans "cusps". Ma conjecture, maintenant, est qu'il existe des $\phi \in C^k$ dans la classe $n_a = k+1$.

J'avais espéré que les "vision people" aimeraient une récurrence pour l'algorithme pyramidal avec un nombre fini de termes, mais ils n'aiment pas trop l'assymétrie. Mais elles pourraient peut-être servir à autre chose... ?

Voilà toutes mes nouvelles.

Un grand bonjour à Anne,
et à Guy David!

Ingrid.