Yale University *New Haven, Connecticut 06520*

(203) 432-4172

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
12 Hillhouse Avenue
Box 2155 Yale Station

le 12 Mars '87.

Cher Yves,

Ci-joint je t'envoie une copie de ce que j'ai rédigé sur les ondelettes à support compact. Il ne s'agit pas (encore) d'un article : c'est plutôt le genre de chose que je rédige pour moi-même avant d'écrire un article, afin de me clarifier les idées. Toutes les démonstrations y sont.

Je te disais, au téléphone, que ma façon de voir les ondelettes à support compact était plus graphique. C'est aussi la façon dont je les ai trouvées. Au départ, soient $f(n), g(n)$. (En fait, Bob Hummel, qui fait de la "vision" à NYU, m'avait passé des articles, notamment de J. Burt, où il a une décomposition + reconstruction avec 1 seul filtre. Il ne s'agit pas d'une décomposition utilisant des ondelettes, et l'algorithme proposé par S. Mallat est non seulement plus joli, mais aussi plus efficace. Stéphane réfère à Burt (Laplacian pyramid schemes) dans son papier. Comme j'avais lu Burt quelques jours avant de recevoir le papier de Stéphane, j'étais tout à fait dans le "frame of mind" pour prendre les filtres, où l'algorithme discret, comme point de départ plutôt que comme conséquence de la (très belle!) structure ondelettes + multiscale.). Donc, soient les $f(n), g(n)$.

En lisant ~~de~~ l'article de Stéphane, je me suis tout de suite rendu compte que l'algorithme discret reposait complètement sur

$$\sum_k \left[f(n-2k)\, f(m-2k) + g(n-2k)\, g(m-2k) \right] = \delta_{mn} \qquad (1)$$

et

$$\sum_n f(n-2k)\, g(n-2\ell) = 0 \quad . \qquad (2)$$

Et je me suis alors demandée s'il existait des $f(n), g(n)$ satisfaisant ces conditions, et qui ne seraient pas nécessairement dérivés d'une base d'ondelettes. Et, en fait, il en existe.

Un exemple est

$$f(0) = \lambda\mu N^{-1} \quad f(1) = \lambda N^{-1} \quad f(2) = N^{-1} \quad f(3) = -\mu N^{-1}$$

$$g(0) = \mu N^{-1} \quad g(1) = N^{-1} \quad g(2) = -\lambda N^{-1} \quad g(3) = \lambda\mu N^{-1}$$

où $N = \left[(1+\lambda^2)(1+\mu^2) \right]^{1/2}$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ arbitraires.

Comme on aime les filtres avec "a finite number of taps", c. à. d. avec un nombre fini de coefficients $f(n) \neq 0$, je m'imposais cette condition dès le départ aussi.

~~Quand les~~ $\cancel{f(n), g(n)}$ ~~sont connus, et qu'on les a utilisés par la décomposition de d'une séquence~~ $\cancel{(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}}$

Les gens qui jouent avec ces filtres aiment avoir une certain continuité aussi. Leur façon de voir est la suivante.

Décomposons une séquence $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, que nous imaginons être un signal discret, avec un "pas", entre deux impulsions consécutives, très petit. La décomposition, selon l'algorithme de Stéphane, donne des séquences

$$d_1 = G c \qquad\qquad \text{où } (Gc)_k = \sum_n g(n-2k)\, c_n$$

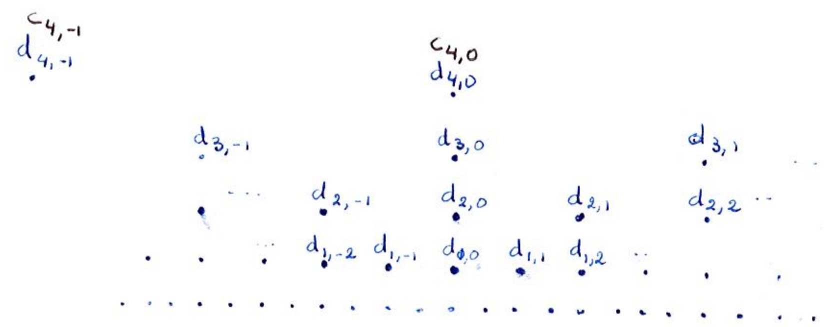
$$d_2 = G F c \qquad\qquad (Fc)_k = \sum_n f(n-2k)\, c_n$$

$$\vdots$$

$$d_N = G F^{N-1} c \qquad\qquad \text{(notations de Stéphane)}$$

et $c_N = F^N c$

où chaque d_j a un "pas" 2^j fois plus grand que le c du départ, et c_N a un "pas" 2^N fois plus grand.
Marquons ceci sur une structure pyramidale (les mêmes dessins que tu utilises ! J'étais très excitée de les retrouver dans des papiers d'ingénieurs.)
Je marque les d_j en bleu, le c_N final en noir.



Pour reconstruire, on joue une espèce de billard électronique, qui à chaque pas, marque une série de nombres en noir une rangée en dessous de la dernière rangée en noir du tour précédent.
(Je sais que tout cela t'est bien plus familier qu'à moi, et que ma façon de te présenter doit te paraître enfantine, ...) Mais j'aime bien cette image de billard électronique). Et la règle est, évidemment

$$c_{n-1,k} = \sum_{\ell} \left(f(k-2\ell)\, c_{n,\ell} + g(k-2\ell)\, d_{n,\ell} \right) .$$

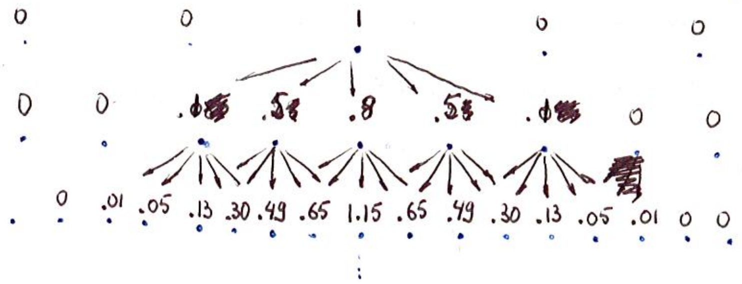
Ce qui est nouveau dans l'algorithme de Stéphane est le fait qu'il utilise <u>deux</u> séquences $f(n), g(n)$, ce qui fait évidemment toute la différence !, par rapport aux procédés antérieurs !

~~Quand on~~

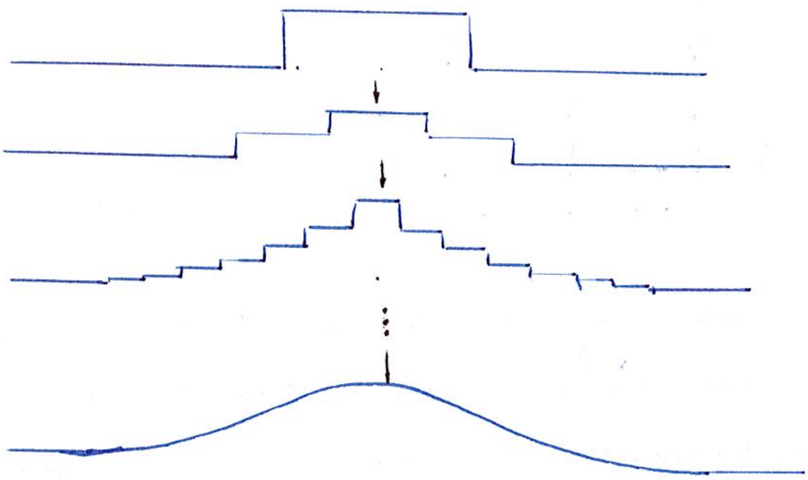
La "continuité" qu'aiment les ingénieurs dans cet espèce de billard électronique est la suivante. Supposons que nous mettions, comme données, un seul "1", en noir, à un niveau assez élevé, et <u>tous</u> les $d_j \equiv 0$. Les conditions initiales les plus simples, quoi. Alors le jeu de reconstruction va me donner une série d'histogrammes de plus en plus détaillés :

ex. $f(-2) = f(2) = .1$ $\qquad f(-1) = f(1) = .5$ $\qquad f(0) = .8$

(ceci ne correspond pas (1)+(2), mais est un filtre utilisé par Burt)



ou, plus graphiquement



Ce qu'ils aiment, c'est que la limite de ces histogrammes, pour un nombre de pas tendant vers l'infini, soit une fonction "décente" : certainement continue, préférablement C^1 ou C^2.

Ce que je cherchais donc, étaient des solutions de (1)+(2) telles que l'itération de F sur la séquence $(c_N)_k = \delta_{k0}$, mène vers une fonction continue. Ou, plus précisément, en définissant

$$(Th)(x) = \frac{2}{\sum f(n)} \sum f(n)\, h(2x-n),$$

je voulais que $T^n \chi_{[-1/2,\, 1/2]}$ converge, pour $n \to \infty$, vers une fonction continue. Et là, dans mon analyse de cette convergence, je tombais, évidemment, dans les produits infinis, et je manipulais la fonction que tu dénotes m_0 (qui est F dans le papier de Stéphane, et $\mathcal{F}$ dans mes notes. Excuse-moi pour divergence de notations. Je n'ai découvert ~~mo~~ qu'après l'arrivée de Thierry, qui m'a donné des copies de ses articles récents). Imposant certaines conditions sur $\mathcal{F}(\xi) = \sum_n f(n) e^{in\xi}$, qui reviennent essentiellement à imposer la divisibilité de $\mathcal{F}$ par $(1+e^{i\xi})^n$, j'arrivais à démontrer la convergence des $T^n \chi_{[-1/2, 1/2]}$, en L^2 dans mes notes, mais on peut aussi la démontrer point par point, ~~..~~ vers une fonction ϕ continue. Le dessin graphique montre ~~...~~ tout de suite que $|\mathrm{supp}\, \phi| < \infty$ si seulement un nombre fini de $f(n)$ sont $\neq 0$. Ce "billard" est aussi une façon fort simple de programmer pour obtenir un graphique de ϕ.

D'autre part, je m'étais rendu compte que (1)+(2) impliquent

$$\sum_n f(n-2k) f(n-2\ell) = \delta_{k\ell},$$

c.à.d. que le passage, dans le billard, d'un rang au suivant, préserve l'orthogonalité dans ℓ^2. C.à.d. que les fonctions $\phi(x)$ et $\phi(x-k)$, obtenues des séquences $(c)_n = \delta_{n0}$ et $(\tilde{c})_m = \delta_{nk}$, étaient automatiquement orthogonales, puisque c et $\tilde{c}$ l'étaient! (C'est ce point-ci, que j'avais trouvé au début, mais perdu de vue après, que j'ai retrouvé entre ma 2ème et ma 3ème lettre : à un certain moment je ~~ne~~ craignais n'avoir que des frames, et cet argument-ci m'a rendu les bases que je t'annonçais dans ma 1ère lettre).

L'aspect "frame" venait du fait que

$$\sum_k c_{n-1,k}^2 = \sum_j (c_{n,j}^2 + d_{n,j}^2)$$

qui est une conséquence de (1)+(2).

Après ma première lettre, j'avais abandonné les matrices Toeplitz, et utilisé plutôt les fonctions complexes, c.à.d.

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{\sum f(n)} \left[\alpha(2\xi) + e^{i\xi} \beta(2\xi) \right]$$

où $\alpha(\xi) = \sum a(n) e^{in\xi}$ $\qquad \beta(\xi) = \sum b(n) e^{in\xi}$

$a(n) = f(2n)$ $\qquad b(n) = f(2n+1)$.

(1) + (2) se réduisent alors à

$$|\alpha(\xi)|^2 + |\beta(\xi)|^2 = 1 .$$

Comme j'avais été tout de suite enflammée, à la lecture de l'article de Stéphane, par la possibilité de construire d'autres filtres, pas nécessairement liés à des ondelettes (mais elles se sont vengées!), je n'avais prêté que peu d'attention à la condition

$$|F(\xi)|^2 + |F(\xi+\pi)|^2 = 1 ,$$

et, après ma lecture en diagonale, je croyais même qu'elle était associée à la symmétrie de ϕ. Quand j'ai rencontré Stéphane il m'a dit que ce n'était pas le cas, et je me suis rendu compte que ma condition sur α et β était en fait identique à celle-ci. Et évidemment, après j'ai lu ton papier, et j'ai compris à quel point le tout était inévitable.

Après, j'ai construit des exemples donnant des $\phi \in C^k$, k arbitraire, (§ 4.3 dans les notes ci-jointes). Comme mes exemples avaient un support croissant exponentiellement avec k, ce que je n'aimais pas du tout, je voulais t'appeler pour savoir comment les tiennes croissaient. Je ne suis pas arrivée à te joindre, mais j'ai eu Alex au téléphone, qui m'a dit que tu obtenais des exemples ~~en~~ par itération (j'étais éblouie par cette révélation, et j'ai toute de suite, après le coup de fil à Alex, calculé que la croissance serait moins forte), et aussi qu'un résultat que j'avais finalement, après ~~longue~~ réflection, démontré, sur les racines carrées de certains polynômes trigonométriques, se trouvait dans Polya et Szego. — Le lendemain, comme je trouvais les exemples par itération tellement plus jolis que les miens, je t'ai appelé pour te proposer d'écrire l'article ensemble.

Je n'ai pas encore vu ce que tu m'as envoyé à Courant, et je ne sais pas si ce sera déjà arrivé ce week-end-ci. Mais, tu vois, je me suis attachée à cette façon graphique de voir les choses. Si je t'ai bien compris, tu as, dans le manuscrit que tu m'as envoyé, incorporé les ondelettes à support compact dans le cadre général des analyses multiscale. Je vois comment elles y trouvent leur place naturelle, mais je me demande si la façon "graphique" (qui n'est pas aussi bien adaptée aux autres ondelettes, notamment l'ondelette "historique") n'est pas plus intuitive pour voir comment des ondelettes à support compact pourraient exister. Tu vois, je me suis attachée à cette façon de voir, qui est la façon dont je les ai trouvées..

~~Peut-être~~ Il y a quelques années, une histoire m'est arrivée qui explique peut-être ce sentiment d'attachement. Je vais te la raconter. Quand j'étais à Princeton, j'ai travaillé, avec Elliott Lieb, sur un problème relié à la stabilité de la matière, et nous avions obtenu un joli résultat. Comme c'était un problème qu'Elliott m'avait donné, et qu'on en avait beaucoup discuté ensemble, et qu'il m'avait suggéré quelques idées-clé, j'avais, après avoir démontré tout ce que nous voulions, rédigé l'article, avec, évidemment, nos deux noms. En lisant l'article, Elliott a trouvé que les démonstrations étaient justes, certes, mais peu jolies. Et alors, il a trouvé une façon beaucoup plus jolie de démontrer le même résultat, avec des constantes meilleures, et j'ai rerédigé l'article, avec les nouvelles démonstrations. Ce sont des choses qui arrivent, c'est la vie, et l'attitude d'Elliott était entièrement correcte (nous sommes restés co-auteurs), mais j'ai toujours eu le sentiment que la 2ème version, ~~qui~~ où les démonstrations, bien que rédigées par moi, portaient très nettement la griffe Lieb, n'avait rien à voir avec moi, et que ce n'était pas vraiment mon papier, que je n'y avais aucun mérite. J'ai encore, dans mes tiroirs à Bruxelles, "ma" version – Et j'ai un peu peur, que maintenant je sois dans une situation analogue. Comme j'ai un contact ~~p~~ beaucoup plus chaleureux avec toi (et je t'en suis très reconnaissante!) qu'avec Elliott, je peux essayer de te l'expliquer. D'une part, je comprends que tu préfères ~~la~~ une présentation globale, où toutes les ondelettes se retrouvent, et où les ondelettes à support compact ont leur petite niche écologique dans la grande forêt des ondelettes. Mais je n'ai apporté aucune contribution à cette vue-là, bien qu'évidemment, je l'admire beaucoup. D'autre part, j'aime bien mon billard électronique.. Alors, peut-être que, comme tu disais, il y a lieu de faire deux textes... Mais nous parlerons de tout ceci à Paris. – J'espère que je ne t'ennuie pas trop avec ces "délicateries"...

A bientôt! Un grand bonjour
à tout le monde...

Ingrid.