AT&T Bell Laboratories

AT&T Bell Laboratories

600 Mountain Avenue
P.O. Box 636
Murray Hill, NJ 07974-0636
908-582-3000

Cher Yves,

Tu me demandes ce que je fais, et ce que fait Caroline...

Caroline marche presque : elle se tient debout, sans appui, pendant 10 à 15 secondes, et quand elle a un appui (nos mains, ou un meuble), elle fait des petits pas. Elle est toujours gaie et une vraie joie ... sauf la nuit, où elles se réveille encore très souvent, et demande sa maman.

Quant à sa maman, elle a regardé le drôle de schéma que je vais te décrire ici.
Jim Johnston (qu'Albert connaît bien) nous avait dit depuis longtemps (un an) qu'il aimerait bien un schéma où il pourrait faire des paquets d'ondelettes, mais où il pourrait changer le choix de la base à utiliser en cours de route. Quand nous avons obtenu les bases sur l'intervalle avec nombre égal de fonctions échelle et ondelettes à chaque résolution, nous

AT&T Bell Laboratories

AT&T Bell Laboratories

600 Mountain Avenue
P.O. Box 636
Murray Hill, NJ 07974-0636
908-582-3000

lui avons annoncé que nous avions une réponse qui faisait exactement ce qu'il faisait : on pouvait découper en morceaux, et faire des paquets optimaux sur chaque morceau.

Entre parenthèses : quand j'avais appris la construction des bases "sinus localisés" — pour lesquelles, me disent les ingénieurs, il faudrait citer non seulement Malvar, mais aussi : Prinsen and Bradley, cités dans l'article de Malvar, et qui avaient déjà eu une partie des idées — je l'ai aussitôt indiquée a Johnston comme une solution. Mais il aime mieux les paquets d'ondelettes, parce qu'ils permettent d'avoir des résolutions différentes en même temps. Càd., si tu as un signal de basse fréquence de t_0 à t_1, mais aussi des petits chouïas de haute fréq. de t_2 à t_3, et de t_4 à t_5, où $t_0 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 < t_1$, alors tu peux, avec les ondelettes, utiliser toute la fenêtre $t_0 \to t_1$ pour la basse fréq, et en même temps de petites fenêtres pour les hautes fréq. Avec un schéma à la Malvar, tu découperais en morceaux, même pour les basses fréq.

Apparemment, c'est un réel problème pour les morceaux de musique avec plusieurs instruments, me dit Johnston (qui a essayé d'implémenter Prinsen & Bradl

AT&T Bell Laboratories

AT&T Bell Laboratories
600 Mountain Avenue
P.O. Box 636
Murray Hill, NJ 07974-0636
908-582-3000

Mais il n'aimait pas cette réponse! Malgré le fait que nous coupions de façon a ne pas déranger la regularité! En utilisant un argument d'Albert, je lui expliquais que c'était comme si on prolongeait la fonction de manière douce et qu'on décomposait alors cette extension. La raison pour laquelle il n'en voulait pas est la suivante: supposons qu'on reconstruise après arrondi, ~~a~~ ou quantification, ou un autre procédé qui a superposé un bruit aux coéfficients. Alors, par le fait même que les ondelettes sur l'intervalle ont un bord abrupt à la fin de l'intervalle, la reconstruction, après erreurs, aura des discontinuités... Pire: des erreurs sur des coéfficients correspondant à de très basses fréquences peuvent mener à ces discontinuités, c.à.d. des erreurs de haute fréquence. Trrrès mauvais, d'après J.-J.

Alors j'ai pensé au schéma hybride suivant:

- Supposons qu'on veuille des blocs de taille T, avec une base différente de paquets d'ondelettes sur chaque bloc.

- Commençons par décomposer ~~toutes~~, en faisant

AT&T
Bell Laboratories

AT&T Bell Laboratories

600 Mountain Avenue
P.O. Box 636
Murray Hill, NJ 07974-0636
908-582-3000

tous les filtrages possibles, toutes les données entre 0 et $T + \Delta T$, où ΔT est choisi de façon telle que, même à la résolution la plus grossière, aucune fonction n'a support plus grand que ΔT. (Je suppose qu'on a a priori décidé de ne pas aller au-delà d'un nombre fixé de filtrages successifs). Peu importe ce qu'on fait au bord $T+\Delta T$. (En pratique, je crois que le mieux est d'utiliser les ondelettes sur l'intervalle pour ce bord-ci,

- Décidons alors quelle est, parmi toutes les bases possibles, la base optimale. (C.à.d. on décide du pavage optimal, pour ce bout de signal. Comme on utilise $0 \to T+\Delta T$ pour cette décision, alors qu'on va se restreindre à $0 \to T$ plus loin, la décision pourrait bien ne pas être tout à fait optimales, mais je ne sais pas comment y remédier.)

- Cette décision prise, retournons en arrière. Le but est de n'utiliser, pour ce morceau $0 \to T$, que des fonctions dont le support a une intersection non triviale avec $[0,T]$. En fait, la réponse est donnée par la construction, mais je vais choisir de ne pas orthonormaliser au bout, (pour des raisons que j'explique plus loin). Je veux que

THE STATE UNIVERSITY OF NEW JERSEY
RUTGERS
Department of Mathematics at New Brunswick • Hill Center for the Mathematical Sciences • Busch Campus
New Brunswick • New Jersey 08903 • 201/932-2390

la superposition choisie reproduise exactement le signal sur $[0,T]$;, et je n'utiliserai que des paquets d'ondelettes non modifiés au bout. Certains d'entre eux auront une queue qui dépasse T — et ces queues seront très importantes —, mais je ne veux les distinguer que par la partie contenue dans $[0,T]$. Ceci veut dire que je devrai éliminer certains paquets : chaque fois que j'utilise un "splitting" avec m_0 et m_1, les filtres tout au bout utilisant m_1 ne donnent que des combinaisons linéaires ~~que~~ de ce que les m_0 au bout donnent. (C'est ton observation que les $\psi_{j,k}|_{[0,1]}$ qui ont moins de la moitié de leur support à l'intérieur de $[0,1]$ sont en fait des combinaisons linéaires des $\phi_{jk}|_{[0,1]}$).

Concrètement :

$$\underbrace{\psi(x)}_{\text{support } [0,\,2N-1]} = \sum_{n=0}^{N-2} a_n\, \phi(x-n) + \cancel{\text{queue}}\ \underbrace{Q(x)}_{\text{queue, qui a support } [N-1,\,2N-1]}$$

où

$$a_0 = \frac{h_{2N-1}}{h_0}$$

$$a_n = \frac{h_{2N-1-2n} - h_{2n}\, a_{n-1}}{h_0}$$

THE STATE UNIVERSITY OF NEW JERSEY
RUTGERS

Department of Mathematics at New Brunswick • Hill Center for the Mathematical Sciences • Busch Campus
New Brunswick • New Jersey 08903 • 201/932-2390

une formule tout à fait analogue tient pour $m_1(\xi), m_0(\xi)$.
Alors, à chaque fois que je fais un "splitting" au bout T, je reporte les ~~coeff~~. N−1 coeff. du bout ~~dans~~ de la bande m_1 dans la bande m_0 (utilisant la formule ci-dessus), et je laisse tomber les N−1 taps correspondants dans la bande m_1.

Le résultat est bien une représentation de f par des paquets d'ondelettes, qui reproduit f exactement dans $[0,T]$, et où tous les paquets (du bord) ont des queues de la taille correspondant à leur résolution, dépassant T.

(Ces queues sont la raison pour laquelle je n'ai pas utilisé ton schéma directement : si j'utilise les coeffs. résultant d'une orthonormalisation, j'arrive à écrire une jolie queue pour ψ, mais pour des paquets d'ondelettes incorporant plusieurs m_1, mes queues deviennent de plus en plus courtes, ce qui n'est pas l'effet désiré. En plus, ce schéma-ci est plus simple pour la suite).

- Procédons maintenant au bloc suivant. Je commence par faire la différence entre $f|_{[T,\infty)}$ et les "queues"

THE STATE UNIVERSITY OF NEW JERSEY
RUTGERS
Department of Mathematics at New Brunswick • Hill Center for the Mathematical Sciences • Busch Campus
New Brunswick • New Jersey 08903 • 201/932-2390

du bloc précédent. C.à.d.

$$f\big|_{[0,T]}(x) = \sum_\alpha c^0_\alpha \, \varphi_\alpha(x)\big|_{[0,T]} \quad \varphi_\alpha \text{ paquets d'ondelettes}$$

$$= \sum_{\alpha \text{ intérieurs}} c^0_\alpha \, \varphi_\alpha(x) + \sum_{\alpha \text{ bord}} c^0_\alpha \, \varphi_\alpha(x)\big|_{[0,T]}$$

$$\Rightarrow \quad f^{\text{diff}}\big|_{[T,\infty)}(x) = f\big|_{[T,\infty)}(x) - \sum_{\alpha \text{ bord}} c^0_\alpha \, \varphi_\alpha(x)\big|_{[T,\infty)}$$

Cette différence $f^{\text{diff}}(x)$ est égale à zéro en T, ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n, si $\psi \in C^{n+\varepsilon}$. Au bord T, elle peut donc être décomposée à merveille avec le schéma sur l'intervalle que S. Jaffard et toi aviez construit il y a quelques années, en n'utilisant que les $\varphi_{j,k}$ avec supports contenus dans l'intervalle (ou la demi-droite, puisque je ne regarde qu'un seul bord), et quelques $\psi_{j,k}$ supplémentaires (exactement $N-1$)

- A l'autre bout, $2T$, je fais la même chose qu'avant. (Pour plus de simplicité, supposons $T > \Delta T$, de façon à ce que les queues de $[0,T]$ ne dépassent pas $2T$) C.à.d. je regarde d'abord $[T, 2T+\Delta T]$ pour décider

THE STATE UNIVERSITY OF NEW JERSEY
RUTGERS

Department of Mathematics at New Brunswick • Hill Center for the Mathematical Sciences • Busch Campus
New Brunswick • New Jersey 08903 • 201/932-2390

quel dallage choisir en temps-fréquence, et je fais la décomposition adaptée au bord 2T, en ~~repartan~~ redistribuant les nombres pour les derniers N-1 taps de chaque m, ~~de~~ sur le m_0 correspondant.

Le tout correspond à une variation sur un schéma où on utiliserait "trop peu" de fonctions échelle aux bords gauches et "trop" de fonctions échelle aux bords droits ; le résultat est aussi un schéma avec autant de fonctions échelle que d'ondelettes à chaque résolution ; en plus, ce schéma a l'avantage que si on injecte du bruit près des bords, il ne donnera pas lieu à des discontinuités.

Aussi longtemps qu'on ~~ne~~ n'utilise qu'un nombre fixe J de niveaux de résolution, ~~la décompositio~~ les fonctions utilisées dans la décomposition constituent toujours une base de Riesz. Si je dénote les coëffs obtenus par $c_{n,\alpha}$, n pour le bloc $[nT, (n+1)T]$, α pour l'indice du paquet d'onde, alors je trouve

$$\|f\|^2 \leq 2 \sum_{n,\alpha} |c_{n,\alpha}|^2$$

(parce que les $\varphi_{n,\alpha}$ sont orthogonaux pour n fixe, et ~~&~~ les $\varphi_{n,\alpha}$ et $\varphi_{n+k,\beta}$ ont des supports disjoints si $k \geq 2$)

THE STATE UNIVERSITY OF NEW JERSEY
RUTGERS
Department of Mathematics at New Brunswick • Hill Center for the Mathematical Sciences • Busch Campus
New Brunswick • New Jersey 08903 • 201/932-2390

D'autre part, l'effet de "redistribution" des coeff aux bords, décrit plus haut, mène à une borne du type

$$\sum_{\alpha} |c_{n,\alpha}|^2 \le C\, 2^J \sum_{\alpha} |\langle f|_{[nT,(n+2)T]}, \varphi_{n,\alpha}\rangle|^2$$

dépendant des ~~...~~ m_0, m, choisis

$$\Rightarrow \quad \sum_{n,\alpha} |c_{n,\alpha}|^2 \le 2\, C\, 2^J \|f\|^2 .$$

Si J est grand, la constante de conditionnement donnée par ces bornes est fort petite...

J. Johnston est très enthousiaste pour ce schéma, parce qu'il aime bien cette idée d'interpénétration des blocs sur une distance dictée par la résolution ~~du~~ ~~nie~~ de chaque niveau. Nous allons voir maintenant ce que cela donne en pratique.

Et voilà ce que je fais ! (A part enseigner, et rédiger l'article avec Albert et Pierre Vial, sur les ondelettes sur l'intervalle).
Un grand bonjour à Thierry et Albert ! Je t'embrasse,

Ingrid.