Georgia Benkart: in memoriam

por

Alberto Elduque

El 29 de abril de 2022, a los 74 años de edad y de manera inesperada para sus amigos, fallecía Georgia Benkart, una referente en teoría de Lie, teoría de representaciones, combinatoria o álgebra no conmutativa, y mucho más.

Para entender bien el trabajo desarrollado por Georgia, lo mejor es ir al magnífico artículo de Tom Halverson y Arun Ram [14]: *Gems from the work of Georgia Benkart.* En este artículo aparece el siguiente párrafo:

> *However, we feel that Georgia's contribution to our discipline goes well beyond this astonishing catalog of research papers, monographs, lectures, and service role. She has left an indelible mark on a generation of mathematicians through supportive collaboration with more than 90 coauthors, many of whom are (or, more accurately, were) early-career researchers. And there are even more mathematicians who were not her coauthors but to whom Georgia's mentoring, advice, and support made it possible for them to achieve much more than they ever expected of themselves. Georgia, always humbly and perfectly, serves as a role model and mentor to all.*

Varios matemáticos españoles (¡plural neutro!) nos encontramos entre aquellos afortunados a los que Georgia nos dejó una marca indeleble, entre aquellos para los que Georgia era un modelo, o quizá debiera decir el modelo, a seguir. Su profundidad, su cuidado por los detalles, su rigor, sus pinceladas de humor aquí y allá, su sencillez…, han dejado una huella muy profunda en sus colaboradores y amigos.

El trabajo antes mencionado de Halverson y Ram cubre los principales temas que trató Georgia a lo largo de su carrera: clasificación de las álgebras de Lie simples finitodimensionales sobre cuerpos de característica prima, representaciones de álgebras y grupos cuánticos, álgebras de división no asociativas, múltiples variaciones de la dualidad clásica de Schur-Weyl entre el grupo general lineal y el grupo simétrico y toda la combinatoria asociada a estas variantes…

Buena parte de su investigación se centró en las álgebras de Lie y sus relaciones con otros tipos de álgebras no asociativas (esto es, no necesariamente asociativas). Ya en su tesis doctoral, defendida en 1974 bajo la dirección de Nathan Jacobson, trabaja con álgebras de Lie relacionadas con álgebras asociativas, álgebras de Jordan, o con las álgebras J-ternarias de Allison.

Aquí daremos algunas pinceladas sobre esta parte de su trabajo, evitando entrar en detalles demasiado técnicos.

Georgia Benkart (segunda por la derecha) con el autor de este artículo (primero por la izquierda), Consuelo Martínez y Santos González, en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1994 en Zúrich.

En la sección 1 introduciremos las álgebras de Lie y sus descomposiciones en espacios de raíces. En la famosa clasificación de Killing-Cartan de las álgebras de Lie simples sobre los complejos aparecen cuatro familias infinitas y cinco álgebras excepcionales. En la sección 2 hablaremos de una bellísima construcción de Tits que permite obtener estos objetos excepcionales de una manera unificada, relacionándolos con otros tipos de álgebras: las álgebras de composición (esto es, los análogos a las álgebras de los reales, complejos, cuaterniones y octoniones) y las álgebras de Jordan, que, junto a las álgebras de Lie, forman la otra gran variedad de álgebras no asociativas. En la sección 3 veremos cómo Georgia Benkart y Efim Zelmanov supieron comprender y extender la construcción de Tits para ser capaces de describir las álgebras de Lie, no necesariamente de dimensión finita, graduadas sobre los sistemas de raíces *con enlaces múltiples*. En la sección 4 comprobaremos cómo la construcción de Tits puede extenderse utilizando superálgebras de Jordan, en lugar de álgebras de Jordan, y que esto permite obtener las superálgebras de Lie simples excepcionales, e incluso descubrir alguna superálgebra de Lie simple nueva en característica prima.

1. Álgebras de Lie

En lo que sigue, un *álgebra* sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ no es más que un espacio vectorial A sobre $\mathbb{F}$, dotado de una aplicación bilineal (la multiplicación) $A \times A \to A$.

Por supuesto, esto es demasiado general, y las álgebras a las que estamos acostumbrados satisfacen más restricciones. Así tenemos álgebras asociativas como las álgebras de matrices $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$, o más generalmente las álgebras de endomorfismos de espacios vectoriales $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ con la multiplicación dada por la composición de aplicaciones; o álgebras conmutativas y asociativas como las álgebras de polinomios $\mathbb{F}[X_1, \ldots, X_n]$, las álgebras de funciones continuas $\mathcal{C}(X)$ sobre un espacio topológico, o de funciones suaves $\mathcal{C}^\infty(M)$ sobre una variedad diferenciable real.

Dada un álgebra A, una *derivación* es un endomorfismo lineal δ de A, tal que

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$$

para todo $x, y \in A$ (donde xy denota la multiplicación de x e y). El conjunto de derivaciones $\mathrm{Der}(A)$ es un subespacio del álgebra asociativa $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(A)$, pero no es una subálgebra (esto es, no es cerrado para la multiplicación). Sin embargo $\mathrm{Der}(A)$ sí que es cerrado para la nueva multiplicación dada por el corchete de Lie (¡ejercicio!):

$$[\delta, \delta'] := \delta\delta' - \delta'\delta.$$

Esta multiplicación verifica las dos propiedades siguientes:

- anticonmutatividad: $[\delta, \delta] = 0$ para toda $\delta \in \mathrm{Der}(A)$,
- identidad de Jacobi: $[[\delta_1, \delta_2], \delta_3] + [[\delta_2, \delta_3], \delta_1] + [[\delta_3, \delta_1], \delta_2] = 0$, para cualesquiera $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathrm{Der}(A)$.

Un álgebra cuya multiplicación satisface estas dos propiedades se conoce como un *álgebra de Lie*.

Las álgebras de Lie aparecieron en el siglo XIX como los objetos infinitesimales asociados a los grupos de Lie. Estos objetos infinitesimales son lineales, por lo que toda la potencia del álgebra lineal se puede usar en ellos, permitiendo estudiar así el grupo de Lie original, que es un objeto no lineal. Dada una variedad diferenciable real M, sus campos vectoriales no son más que derivaciones, esto es, elementos de $\mathrm{Der}\big(\mathcal{C}^\infty(M)\big)$, y este espacio (en general de dimensión infinita) ya sabemos que es un álgebra de Lie. El álgebra de Lie de un grupo de Lie G no es más que la subálgebra formada por los campos vectoriales invariantes por los difeomorfismos dados por la multiplicación a izquierda por elementos de G.

Un resultado célebre en matemáticas es la clasificación de Killing-Cartan (1887–1894) de las álgebras de Lie simples (esto es, de multiplicación no trivial y sin ideales propios) sobre el cuerpo de los números complejos. La lista de estas álgebras consiste en cuatro familias infinitas $\mathfrak{a}_n$ $(n \geq 1)$, $\mathfrak{b}_n$ $(n \geq 2)$, $\mathfrak{c}_n$ $(n \geq 3)$ y $\mathfrak{d}_n$ $(n \geq 4)$, junto a cinco excepciones inesperadas $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$ y $\mathfrak{e}_8$.

Las álgebras que aparecen en esta clasificación, con pequeñas variaciones, tienen sentido sobre cuerpos arbitrarios de característica distinta de 2.

Esta clasificación se obtiene eligiendo una subálgebra abeliana $\mathfrak{h}$ de nuestra álgebra de Lie simple $\mathfrak{g}$ cuyos elementos verifican que la multiplicación por ellos es un endomorfismo diagonalizable, de modo que $\mathfrak{h}$ sea maximal con estas propiedades ($\mathfrak{h}$ se dice *subálgebra de Cartan* de $\mathfrak{g}$). La acción de $\mathfrak{h}$ descompone $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \right) \tag{1.1}$$

donde Δ es un subconjunto (finito) del espacio dual $\mathfrak{h}^*$ y

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x \ \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

resulta ser un espacio de dimensión 1. El conjunto Δ se dice *sistema de raíces*, y las posibilidades para Δ, que no dependen de la subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ elegida y que tienen un carácter marcadamente combinatorio, son muy restringidas, dando lugar a la clasificación.

El álgebra de Lie $\mathfrak{a}_n$ es el álgebra de matrices cuadradas $(n+1)\times(n+1)$ y traza 0 con la multiplicación dada por el corchete de Lie, que es el álgebra de Lie del grupo de Lie (complejo) de las matrices de determinante 1. De manera análoga, el álgebra $\mathfrak{b}_n$ es el álgebra de Lie del grupo ortogonal en dimensión $2n+1$, el álgebra $\mathfrak{c}_n$ es el álgebra de Lie del grupo simpléctico en dimensión $2n$ y el álgebra $\mathfrak{d}_n$ es el álgebra de Lie del grupo ortogonal en dimensión $2n$. Esto es, las cuatro familias infinitas corresponden a las álgebras de Lie de los grupos de Lie simples clásicos.

Las cinco excepciones aparecieron de manera sorprendente. No fue hasta 1914 cuando Cartan se dio cuenta de que el álgebra de Lie excepcional más pequeña, $\mathfrak{g}_2$, de dimensión 14, es el álgebra de Lie de derivaciones del *álgebra de octoniones compleja*, de la que hablaremos más adelante. En 1950, Chevalley y Schafer probaron que $\mathfrak{f}_4$, de dimensión 52, es el álgebra de Lie de derivaciones de otra álgebra excepcional: el álgebra de Jordan excepcional o álgebra de Albert, de dimensión 27.

Si lo prefieren, y hasta nuevo aviso, los lectores pueden suponer, por simplicidad, que nuestro cuerpo base es $\mathbb{C}$.

En dimensión infinita aparecen muchísimos tipos diferentes de álgebras de Lie. Entre los más usados están las álgebras de Witt y Virasoro y subálgebras notables de ellas, que se obtienen a partir de las álgebras de Lie de derivaciones del álgebra de polinomios o de polinomios de Laurent, o las álgebras de Kac-Moody, definidas de manera independiente por Kac y Moody. En el caso de Moody, estas álgebras aparecen en su tesis doctoral, dirigida por la española María Wonenburger, quien a su vez fue discípula de Jacobson. El desarrollo de la teoría de cuerdas produjo nuevos ejemplos de álgebras de Lie de dimensión infinita con propiedades interesantes.

La formalización matemática de estas álgebras de Lie vino de la mano de Berman (otro discípulo de María Wonenburger) y Moody en los noventa. Dado un sistema de raíces Δ de un álgebra de Lie simple de dimensión finita, un álgebra de Lie $\mathcal{L}$ se dice Δ-graduada si contiene una subálgebra $\mathfrak{g}$ que es simple de dimensión finita y con sistema de raíces Δ relativo a una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$, de manera que se tiene una descomposición

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta\cup\{0\}} \mathcal{L}_\alpha,$$

donde

$$\mathcal{L}_\alpha := \{x \in \mathcal{L} \mid [h, x] = \alpha(h)x \ \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

y $\mathcal{L}_0 = \sum_{\alpha\in\Delta}[\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_{-\alpha}]$.

Berman y Moody describieron las álgebras de Lie Δ-graduadas para Δ el sistema de raíces de $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{d}_n$, $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$ y $\mathfrak{e}_8$.[1]

Georgia Benkart y Efim Zelmanov [8] dieron con la clave para determinar las álgebras de Lie graduadas por los restantes sistemas de raíces, usando y ampliando la bellísima construcción de Tits.

2. Construcción de Tits y el cuadrado mágico de Freudenthal

En 1966, Tits [22] proporcionó una construcción unificada de las álgebras de Lie excepcionales $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$ y $\mathfrak{e}_8$, que depende de dos álgebras: un *álgebra de composición* y un *álgebra de Jordan* de grado 3.

Vamos con las definiciones.

Definición 2.1. Un *álgebra de composición* es un álgebra unitaria[2] dotada de una forma cuadrática no degenerada n que verifica $\mathrm{n}(xy) = \mathrm{n}(x)\,\mathrm{n}(y)$ para todo $x, y \in A$.

Las álgebras de composición más conocidas, y las primeras que fueron estudiadas, son las álgebras de división reales de los números reales $\mathbb{R}$, los complejos $\mathbb{C}$ (donde $\mathrm{n}(z) = z\bar{z}$ para todo z), los cuaterniones $\mathbb{H}$ y los octoniones $\mathbb{O}$. Sobre el cuerpo de los números complejos, salvo isomorfismos solo hay cuatro posibilidades: el cuerpo $\mathbb{C}$; el producto de dos copias del cuerpo, $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$; el álgebra de las matrices 2×2, $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, con $\mathrm{n}(x)$ dado por el determinante;[3] y el álgebra de Cayley (o de octoniones) compleja $\mathcal{C}(\mathbb{C})$, que se obtiene complexificando el álgebra clásica de octoniones $\mathbb{O}$,

$$\mathcal{C}(\mathbb{C}) := \mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Esta última no es asociativa, pero casi: cada dos elementos generan una subálgebra asociativa. Las álgebras que verifican esta propiedad se llaman *álgebras alternativas.*

Todas estas álgebras están dotadas de una involución natural τ, tal que $\mathrm{n}(x) = x\tau(x) = \tau(x)x$ para todo x. En el caso de $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, τ es la involución simpléctica. Además, toda álgebra de composición satisface que todo elemento es raíz de su *polinomio característico*

$$\mathrm{ch}_2(x) = x^2 - \mathrm{tr}(x)x + \mathrm{n}(x)1,$$

donde $\mathrm{tr}(x) = x + \tau(x)$. Se tiene además la igualdad $\mathrm{n}(x) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{tr}(x)^2 - \mathrm{tr}(x^2)\big)$, luego $\mathrm{ch}_2(x)$ se puede expresar exclusivamente en términos de la *traza.*

Otra propiedad que necesitamos es que dados dos elementos a, b en un álgebra de composición, el endomorfismo

$$D_{a,b} := [L_a, L_b] + [L_a, R_b] + [R_a, R_b] \tag{2.1}$$

[1]Nota para expertos: esto es, para los sistemas de raíces cuyo diagrama de Dynkin no tiene enlaces múltiples.

[2]Hay álgebras de composición no unitarias muy interesantes, pero aquí nos restringiremos a álgebras con unidad.

[3]Sí, para matrices de orden 2 el determinante es una forma cuadrática, es no degenerada y $\det(xy) = \det(x)\det(y)$ para todo x, y.

es siempre una derivación, donde $L_a : x \mapsto ax$ y $R_b : x \mapsto xb$ son los operadores de multiplicación a izquierda y derecha.

Por otra parte, las álgebras de Jordan tienen su origen en física. En 1932, el físico Pascual Jordan propuso un programa para descubrir un nuevo marco algebraico para la mecánica cuántica. En la interpretación usual (modelo de Copenhague), los observables se representan mediante operadores hermíticos en un espacio de Hilbert. El producto de tales operadores no es hermítico, pero sí lo es su producto simetrizado

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx), \tag{2.2}$$

que da una multiplicación conmutativa que verifica una forma débil de asociatividad:

$$\begin{gathered} x \cdot y = y \cdot x, \\ x^2 \cdot (y \cdot x) = (x^2 \cdot y) \cdot x, \end{gathered} \tag{2.3}$$

para todo x, y.

Así se llega de modo natural a la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.2. Un *álgebra de Jordan* es un álgebra cuya multiplicación verifica las restricciones (2.3).

Si A es un álgebra asociativa, entonces el mismo espacio vectorial A con el producto simetrizado en (2.2) es un álgebra de Jordan. Estas álgebras y sus subálgebras se llaman *álgebras de Jordan especiales*. Las álgebras de Jordan no especiales se llaman *excepcionales*. En un álgebra de Jordan especial, como la de operadores hermíticos en un espacio de Hilbert, la estructura algebraica viene dada, en buena medida, por la estructura asociativa ambiente.

Las álgebras de Jordan simples de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ resultan ser, salvo isomorfismo, las álgebras de matrices hermíticas sobre un álgebra de composición asociativa $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ o $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, relativas a la involución natural mencionada antes, más los llamados *factores espín*, que se construyen a partir de cualquier espacio vectorial dotado de una forma cuadrática no degenerada y que viven dentro de las correspondientes álgebras de Clifford, y por último aparece una excepción: el álgebra de matrices hermíticas $H_3\big(\mathcal{C}(\mathbb{C})\big)$.[4]

Como escribe McCrimmon en [20, capítulo 0], estos resultados fueron descorazonadores para los físicos: solo había un álgebra de Jordan excepcional y no una familia infinita, que hubiera sugerido la existencia de álgebras excepcionales en dimensión infinita. Casi cincuenta años después, Efim Zelmanov (quien más tarde recibiría la medalla Fields por su resolución del *problema restringido de Burnside*) probó en [23] que no hay álgebras de Jordan simples excepcionales en dimensión infinita.

De modo parecido a (2.1), dados dos elementos cualesquiera x, y de un álgebra de Jordan, el endomorfismo

$$d_{x,y} = [L_x, L_y] \tag{2.4}$$

es siempre una derivación, donde de nuevo $L_x : z \mapsto xz$ (por conmutatividad, $L_x = R_x$).

[4] $H_2\big(\mathcal{C}(\mathbb{C})\big)$ es isomorfa a un factor espín, y $H_n\big(\mathcal{C}(\mathbb{C})\big)$, $n \geq 4$, no es álgebra de Jordan.

Las álgebras de Jordan $H_3(C)$, donde C es una de las álgebras de composición, satisfacen también que todo elemento suyo es raíz de su *polinomio característico*

$$\mathrm{ch}_3(x) := x^3 - \mathrm{tr}(x)x^2 + \mathrm{s}(x)x - \mathrm{q}(x)1$$

donde tr es la traza usual, s es una forma cuadrática y q una forma cúbica, ambas expresables, como pasaba con las álgebras de composición, en términos de la traza. En otras palabras, decimos que estas álgebras tienen *grado* 3.

Dada un álgebra de composición C y un álgebra simple de Jordan de grado 3, Tits consideró el espacio vectorial

$$\mathcal{T}(C, J) = \mathrm{Der}(C) \oplus (C_0 \otimes J_0) \oplus \mathrm{Der}(J),$$

donde $C_0 = \{a \in C \mid \mathrm{tr}(a) = 0\}$ y $J_0 = \{x \in J \mid \mathrm{tr}(x) = 0\}$, con producto anticonmutativo $[.,.]$ determinado por las condiciones siguientes:

- $\mathrm{Der}(C)$ y $\mathrm{Der}(J)$ son subálgebras de $\mathcal{T}(C, J)$ con el corchete de Lie.
- $[\mathrm{Der}(C), \mathrm{Der}(J)] = 0$.
- La acción de $\mathrm{Der}(C) \oplus \mathrm{Der}(J)$ sobre $C_0 \otimes J_0$ es la natural:

  $$[D, a \otimes x] = D(a) \otimes x, \quad [d, a \otimes x] = a \otimes d(x),$$

  para $D \in \mathrm{Der}(C)$, $d \in \mathrm{Der}(J)$, $a \in C$ y $x \in J$.
- Finalmente, el producto de dos elementos en $C_0 \otimes J_0$ viene dado por

  $$[a \otimes x, b \otimes y] = \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(xy)D_{a,b} + [a, b] \otimes x * y + 2\,\mathrm{tr}(ab)d_{x,y},$$

  si $a, b \in C$ y $x, y \in J$, donde $x * y$ es la componente en J_0 del producto $x \cdot y$ en J $(x \cdot y = \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(x \cdot y)1 + x * y)$.

Teorema 2.3 (Tits). *$\mathcal{T}(A, J)$ es un álgebra de Lie simple, con una excepción, y su tipo viene dado en la tabla 1.*

$\mathcal{T}(C, J)$	$H_3(\mathbb{F})$	$H_3(\mathbb{F} \times \mathbb{F})$	$H_3\big(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{F})\big)$	$H_3\big(\mathcal{C}(\mathbb{F})\big)$
$\mathbb{F}$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{f}_4$
$\mathbb{F} \times \mathbb{F}$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_5$	$\mathfrak{e}_6$
$\mathrm{Mat}_2(\mathbb{F})$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{a}_5$	$\mathfrak{d}_6$	$\mathfrak{e}_7$
$\mathcal{C}(\mathbb{F})$	$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{e}_8$

Tabla 1: El cuadrado mágico.

(En la tabla 1 se ha utilizado $\mathbb{F}$ en lugar de $\mathbb{C}$, para incidir en la validez de esta construcción sobre cuerpos arbitrarios de característica distinta de 2 y 3.)

En particular, Tits obtuvo de un plumazo modelos de todas las álgebras de Lie simples excepcionales complejas, salvo $\mathfrak{g}_2$, que aparece como $\mathrm{Der}(C)$, con $\dim C = 8$.

La tabla 1 se conoce como *cuadrado mágico de Freudenthal.* Freudenthal [13] había llegado a él alrededor de 1958 mediante el estudio de ciertas geometrías sintéticas. La primera fila del cuadrado corresponde a geometrías elípticas en dimensión 2 (donde solo hay una clase de objetos primitivos: puntos), la segunda fila a geometrías proyectivas en dimensión 2, la tercera a geometrías simplécticas en dimensión 5 (con tres tipos de objetos primitivos: puntos, líneas y planos), y la cuarta fila a un nuevo tipo de geometrías que él llamó metasimplécticas (que incluyen un cuarto tipo de objetos primitivos: los simplecta).

Echemos un vistazo más detallado a las filas del cuadrado mágico.

Primera fila. Aquí $C = \mathbb{F}$, $C_0 = 0$ y $\mathrm{Der}(C) = 0$. Luego $\mathcal{T}(C, J)$ no es más que el álgebra de Lie de derivaciones de J: $\mathrm{Der}(J)$. En particular, $\mathcal{T}(\mathbb{F}, J)$ tiene sentido para cualquier álgebra de Jordan J.

Segunda fila. Ahora $C = \mathbb{F} \times \mathbb{F}$, C_0 es el subespacio de los múltiplos escalares de $(1, -1)$ y $\mathrm{Der}(C) = 0$, de modo que $\mathcal{T}(C, J)$ se puede identificar con $J_0 \oplus \mathrm{Der}(J)$ y, con un poquito de esfuerzo, con la subálgebra de Lie de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(J)$ generada por los operadores de multiplicación L_x, con $x \in J_0$. De nuevo esto tiene sentido para cualquier álgebra de Jordan, no solo para las álgebras de Jordan simples de grado 3.

Tercera fila. Aquí $C = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F})$ y C_0 es el álgebra simple de dimensión 3 formada por las matrices de traza 0: $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. Esta es el álgebra de Lie simple $\mathfrak{a}_1$. Además $\mathrm{Der}(C)$ es también isomorfa a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. Así, podemos identificar $\mathcal{T}(C, J)$ con

$$\big(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \otimes J\big) \oplus \mathrm{Der}(J), \tag{2.5}$$

con multiplicación dada por

- $\mathrm{Der}(J)$ es una subálgebra,
- $[d, a \otimes x] = a \otimes d(x)$ para $d \in \mathrm{Der}(J)$, $a \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ y $x \in J$,
- $[a \otimes x, b \otimes y] = \big([a, b] \otimes xy\big) + 2\,\mathrm{tr}(ab)d_{x,y}$ para $a, b \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ y $x, y \in J$.

De nuevo esta multiplicación tiene sentido para cualquier álgebra de Jordan, no necesariamente simple de grado 3. El álgebra de Lie obtenida así se llama la construcción de Tits-Kantor-Koecher de J, o construcción TKK, obtenida de manera independiente por estos autores ([21], [17], [18]).

Esta relación tan profunda entre álgebras de Jordan y álgebras de Lie, válida no solo para álgebras de Jordan sino también, con ligeras variaciones, para otros *sistemas de Jordan*, hizo que Issai Kantor dijera *«No hay álgebras de Jordan, solo hay álgebras de Lie»*, contrarrestado por Kevin McCrimmon: *«Nueve de cada diez veces, cuando abres un álgebra de Lie, encuentras un álgebra de Jordan dentro que le hace latir»* (véase [20, p. 14]).

Cuarta fila. En la cuarta fila, $\mathrm{Der}(C)$ es el álgebra simple $\mathfrak{g}_2$ y, como módulo para esta subálgebra, $\mathcal{T}(C, J)$ es la suma directa del módulo adjunto, de 26 $(= \dim J_0)$ copias del módulo irreducible de dimensión 7 dado por C_0 y de 52 $(= \dim \mathrm{Der}(J))$ copias del módulo trivial de dimensión 1.

Pero podemos cambiar el punto de vista. $\mathrm{Der}(J)$ es el álgebra simple $\mathfrak{f}_4$ y, como módulo para esta subálgebra, $\mathcal{T}(C,J)$ es la suma directa del módulo adjunto, de 7 ($=\dim C_0$) copias del módulo irreducible de dimensión 26 dado por J_0 y de 14 ($=\dim \mathrm{Der}(C)$) copias del módulo trivial de dimensión 1.

Estas observaciones son la clave para la descripción que Georgia Benkart y Efim Zelmanov dieron de las álgebras de Lie graduadas por los sistemas de raíces de $\mathfrak{g}_2$ y $\mathfrak{f}_4$, que veremos en la próxima sección.

3. Álgebras de Lie graduadas por sistemas de raíces

Recordemos del final de la sección 1 la siguiente definición. Dado un sistema de raíces Δ de un álgebra de Lie simple de dimensión finita, un álgebra de Lie $\mathcal{L}$ se dice Δ-graduada si contiene una subálgebra $\mathfrak{g}$ que es simple de dimensión finita y con sistema de raíces Δ relativo a una subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$, de manera que se tiene una descomposición

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta\cup\{0\}} \mathcal{L}_\alpha,$$

donde $\mathcal{L}_\alpha = \{x\in\mathcal{L} \mid [h,x] = \alpha(h)x\ \forall h\in\mathfrak{h}\}$ y $\mathcal{L}_0 = \sum_{\alpha\in\Delta}[\mathcal{L}_\alpha,\mathcal{L}_{-\alpha}]$.

Bajo la acción adjunta de la subálgebra $\mathfrak{g}$, $\mathcal{L}$ es una suma de módulos irreducibles de dimensión finita cuyos pesos (esto es, las formas lineales $\lambda:\mathfrak{h}\to\mathbb{F}$ que aparecen como *valores propios* de la acción de la subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$) están contenidos en $\Delta\cup\{0\}$. En los casos considerados por Berman y Moody, $\mathfrak{a}_n$ ($n\geq 1$), $\mathfrak{d}_n$ ($n\geq 4$) y $\mathfrak{e}_n$ ($n=6,7,8$), las únicas posibilidades para estos módulos son, salvo isomorfismo, el módulo adjunto y el módulo trivial de dimensión 1. Sin embargo, en los casos $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$, $\mathfrak{g}_2$ y $\mathfrak{f}_4$, además del módulo adjunto y el trivial, aparece exactamente otro módulo irreducible[5] W. Poniendo juntos los sumandos isomorfos, podemos escribir $\mathcal{L}$ como

$$\mathcal{L} = (\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{F}} A)\oplus(W\otimes_{\mathbb{F}} B)\oplus\mathfrak{d},$$

donde $\mathfrak{d}$ es la suma de los módulos triviales, esto es, el centralizador de la subálgebra $\mathfrak{g}$, y por tanto es una subálgebra de Lie, y A y B son espacios vectoriales cuya dimensión (posiblemente infinita) nos da el número de copias del módulo adjunto y del módulo W involucradas.

Así, el problema consiste en determinar las posibilidades para A, B, $\mathfrak{d}$ y expresar la multiplicación en $\mathcal{L}$ en términos de estos espacios. La idea principal es que la multiplicación en $\mathcal{L}$ induce una multiplicación en la suma $\mathcal{A} = A\oplus B$ que hace de $\mathcal{A}$ un álgebra unitaria (la unidad 1 corresponde a la subálgebra $\mathfrak{g}\simeq\mathfrak{g}\otimes 1$), y hace que $\mathfrak{d}$ actúe de modo natural como derivaciones de $\mathcal{A}$, preservando tanto A como B.

Berman y Moody [9] probaron que para $\mathfrak{g}$ de tipo $\mathfrak{d}_n$ o $\mathfrak{e}_n$, $\mathcal{A} = A$ es un álgebra asociativa y conmutativa, para $\mathfrak{g}$ de tipo $\mathfrak{a}_n$ con $n\geq 3$, $\mathcal{A} = A$ es un álgebra asociativa, mientras que para $\mathfrak{a}_2$, $\mathcal{A} = A$ es un álgebra alternativa (esto es, cada dos elementos generan un álgebra asociativa, siendo las álgebras de Cayley los ejemplos

[5] Para expertos: el módulo irreducible cuyo peso máximo es la raíz corta máxima.

más importantes de álgebras alternativas no asociativas). El caso $\mathfrak{a}_1$ está cubierto por (2.5): $\mathcal{A} = A$ es un álgebra de Jordan [8].

Los casos de $\mathfrak{g}_2$ y $\mathfrak{f}_4$ fueron resueltos por Georgia Benkart y Efim Zelmanov [8]. Aunque hasta ahora solo hemos considerado álgebras sobre cuerpos, no es difícil extender lo hecho a álgebras sobre anillos unitarios, asociativos y conmutativos.

TEOREMA 3.1 ($\mathfrak{g}_2$). *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie graduada por el sistema de raíces de $\mathfrak{g}_2$. Entonces existe un álgebra unitaria, conmutativa y asociativa A y un álgebra de Jordan $\mathcal{J}$ sobre A, equipada con una forma traza que satisface* $\mathrm{ch}_3(x) = 0$ *para todo x, tal que $\mathcal{L}$ es, salvo isogenia central, el álgebra*

$$\mathcal{T}\big(\mathcal{C}(\mathbb{F}), \mathcal{J}\big) := \big(\mathrm{Der}\big(\mathcal{C}(\mathbb{F})\big) \otimes_{\mathbb{F}} A\big) \oplus \big(\mathcal{C}(\mathbb{F})_0 \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{J}_0\big) \oplus \mathrm{IDer}(\mathcal{J}),$$

donde $\mathrm{IDer}(\mathcal{J})$ *es la subálgebra de* $\mathrm{Der}(J)$ *generada por las derivaciones $d_{x,y}$ en* (2.4)*, con $x, y \in \mathcal{J}$.*

La multiplicación en $\mathcal{T}\big(\mathcal{C}(\mathbb{F}), \mathcal{J}\big)$ es totalmente análoga a la que hemos visto en la construcción de Tits (en la que A es el cuerpo base). Esto es, las álgebras de Lie graduadas por el sistema de raíces de $\mathfrak{g}_2$ se obtienen, salvo algún detalle técnico en el que no entraremos (la isogenia central), a partir de la construcción de Tits, con C el álgebra de Cayley $\mathcal{C}(\mathbb{F})$ y $\mathcal{J}$ un álgebra de Jordan de grado 3 definida sobre un álgebra unitaria, conmutativa y asociativa arbitraria, en lugar de sobre el cuerpo base.

TEOREMA 3.2 ($\mathfrak{f}_4$). *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie graduada por el sistema de raíces de $\mathfrak{f}_4$. Entonces existe un álgebra unitaria, conmutativa y asociativa A y un álgebra alternativa $\mathcal{C}$ sobre A, equipada con una forma traza que satisface* $\mathrm{ch}_2(x) = 0$ *para todo x, tal que $\mathcal{L}$ es, salvo isogenia central, el álgebra*

$$\mathcal{T}\big(\mathcal{C}, H_3\big(\mathcal{C}(\mathbb{F})\big)\big) := \mathrm{IDer}(\mathcal{C}) \oplus \big(\mathcal{C}_0 \otimes_{\mathbb{F}} H_3\big(\mathcal{C}(\mathbb{F})\big)_0\big) \oplus \Big(A \otimes_{\mathbb{F}} \mathrm{Der}\big(H_3\big(\mathcal{C}(\mathbb{F})\big)\big)\Big),$$

donde $\mathrm{IDer}(\mathcal{C})$ *es la subálgebra de* $\mathrm{Der}(J)$ *generada por las derivaciones $D_{a,b}$ en* (2.1)*, con $a, b \in \mathcal{C}$.*

De nuevo, las álgebras de Lie graduadas por el sistema de raíces de $\mathfrak{f}_4$ se obtienen a partir de la construcción de Tits, con J el álgebra de Jordan excepcional $H_3\big(\mathcal{C}(\mathbb{F})\big)$ y C un álgebra alternativa de grado 2 definida sobre un álgebra unitaria, conmutativa y asociativa arbitraria.

La descripción de las álgebras de Lie graduadas por el sistema de raíces de $\mathfrak{c}_n$ se basa en la construcción de Tits-Kantor-Koecher (tercera fila de la construcción de Tits), y la de las graduadas por el sistema de raíces de $\mathfrak{b}_n$ se basa en una extensión de la construcción de Tits mediante álgebras de Jordan sobre álgebras unitarias, conmutativas y asociativas análogas a los factores espín. Los detalles se pueden consultar en [8].

Un buen resumen de todos los casos se encuentra en el primer capítulo de la monografía de Allison, Benkart y Gao [1], dedicada a la clasificación de las álgebras de Lie graduadas por los sistemas de raíces *no reducidos*.

4. Superálgebras

Las superálgebras de Lie aparecieron en la segunda mitad del siglo pasado en física, en el contexto de la supersimetría, que relaciona partículas con espín entero y semientero. Toda superálgebra de Lie es una suma directa, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, de una parte par $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, que es un álgebra de Lie, y una parte impar $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$, que es un módulo para la parte par y está dotado de un producto ¡conmutativo! $\mathfrak{g}_{\bar{1}} \times \mathfrak{g}_{\bar{1}} \to \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ con propiedades adecuadas.

Pero podemos definir también superálgebras asociativas, alternativas, de Jordan... Por *superálgebra* siempre entendemos un álgebra $\mathbb{Z}/2$-graduada $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$. Esto significa que la multiplicación de dos elementos pares (esto es, en $A_{\bar{0}}$) o de dos elementos impares (en $A_{\bar{1}}$) es par, mientras que la de un elemento par y otro impar (en cualquier orden) es impar. Un ejemplo importante es el álgebra de Grassmann o álgebra exterior G, que es el álgebra unitaria asociativa sobre nuestro cuerpo base $\mathbb{F}$ con generadores $e_1, e_2, \ldots$ y relaciones $e_ie_j + e_je_i = 0$, para $i \neq j$, y $e_i^2 = 0$. G está graduada sobre $\mathbb{Z}/2$: $G = G_{\bar{0}} \oplus G_{\bar{1}}$, donde un producto $e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r}$ pertenece a $G_{\bar{0}}$ si r es par y a $G_{\bar{1}}$ si r es impar. Pues bien, dada una superálgebra $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$, la *envuelta de Grassmann* de A es la subálgebra de $A \otimes_{\mathbb{F}} G$ dada por $G(A) := (A_{\bar{0}} \otimes_{\mathbb{F}} G_{\bar{0}}) \oplus (A_{\bar{1}} \otimes_{\mathbb{F}} G_{\bar{1}})$.

Decimos entonces que A es una superálgebra de Lie, o de Jordan, o alternativa, o..., si su envuelta de Grassmann es un álgebra de Lie, o de Jordan, o alternativa, o...

La clasificación de las superálgebras de Lie simples de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ (o, más generalmente, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0) se debe a Kac [15]. En ella aparecen de nuevo varias familias infinitas de superálgebras de Lie cuya dimensión se hace arbitrariamente grande al crecer sus parámetros, $A(m,n)$, $B(m,n)$, $C(n)$, $D(m,n)$, $P(n)$, $Q(n)$, $W(n)$, $S(n)$, $\tilde{S}(n)$ y $H(n)$, y tres excepciones:

(i) Existe una única superálgebra de Lie simple $F(4)$ de dimensión 40, cuya parte par es un álgebra de Lie de tipo $\mathfrak{b}_3 \oplus \mathfrak{a}_1$, y la parte impar es, como módulo para la parte par, el producto tensorial de la representación espín para el álgebra de Lie ortogonal $\mathfrak{b}_3$ (de dimensión 8) y el módulo natural (de dimensión 2) para $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$.

(ii) Existe una única superálgebra de Lie simple $G(3)$ de dimensión 31, cuya parte par es un álgebra de Lie de tipo $\mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{a}_1$, y la parte impar es, como módulo para la parte par, el producto tensorial del módulo irreducible no trivial más sencillo para $\mathfrak{g}_2$ (puesto que el álgebra de Lie de tipo $\mathfrak{g}_2$ se puede identificar con $\mathrm{Der}\big(\mathcal{C}(\mathbb{F})\big)$, este módulo es $\mathcal{C}(\mathbb{F})_0$) por el módulo natural para $\mathfrak{a}_1$.

(iii) Existe una familia uniparamétrica $D(2,1;\alpha)$ ($\alpha \in \mathbb{F}\setminus\{0,-1\}$) de superálgebras de dimensión 17, que consiste en las superálgebras de Lie simples cuya parte par es la suma directa de tres copias de $\mathfrak{a}_1$ y la parte impar es, como módulo para la parte par, el producto tensorial de los módulos naturales para cada copia de $\mathfrak{a}_1$.

Las superálgebras $W(n)$, $S(n)$, $\tilde{S}(n)$ y $H(n)$ son *superizaciones naturales* de ciertas álgebras de Lie de dimensión infinita. El resto se conocen como superálgebras de Lie simples clásicas.

Benkart y Zelmanov comprobaron en [8] que $G(3)$ y $F(4)$ se pueden obtener, mediante la construcción de Tits, como $\mathcal{T}\big(\mathcal{C}(\mathbb{F}), J\big)$, para adecuadas superálgebras de Jordan que satisfacen la versión *súper* de la ecuación $\mathrm{ch}_3(x) = 0$. La clasificación de las superálgebras de Jordan simples sobre $\mathbb{C}$ se debe a Kac [16], que aprovechó su clasificación de las superálgebras de Lie junto con la relación entre (super)álgebras de Lie y de Jordan dada por la construcción de Tits-Kantor-Koecher.

Muy pocas de las superálgebras de Jordan simples con parte impar no trivial satisfacen la versión *súper* de la ecuación $\mathrm{ch}_3(x) = 0$ (véase [4, Proposition 5.1] y [12, Proposition 3.2]):

- La superálgebra $J^{0|2} = \mathbb{F}1 \oplus \mathbb{F}x \oplus \mathbb{F}y$, con parte par $\mathbb{F}1$, donde 1 es el elemento unidad de $J^{0|2}$, parte impar $\mathbb{F}x + \mathbb{F}y$, y multiplicación determinada por $xy = -yx = 1$.
- Existe una familia uniparamétrica D_t ($t \neq 0$) de superálgebras de Jordan de dimensión 4, con $(D_t)_{\bar{0}} = \mathbb{F}e + \mathbb{F}e$, $(D_t)_{\bar{1}} = \mathbb{F}x + \mathbb{F}y$ y multiplicación determinada por

$$e^2 = e, \qquad f^2 = f, \qquad ef = 0,$$
$$xy = e + tf\,(= -yx), \qquad ex = \frac{1}{2}x = fx, \qquad ey = \frac{1}{2}y = fy.$$

  La superálgebra D_t satisface la versión *súper* de la ecuación $\mathrm{ch}_3(x) = 0$ si y solo si $t = 2$ o $t = 1/2$.[6]
- La superálgebra de Kac K_{10} es una superálgebra de Jordan simple de dimensión 10. Kac dio una tabla de multiplicación para ella, pero esa tabla no es muy informativa y durante años se buscó una descripción más elegante. Esta fue obtenida en [2] en términos de una superálgebra de Jordan simple no unitaria mucho más sencilla de dimensión 3, conocida como superálgebra de Kaplansky.[7]

---

[6] Es fácil ver que D_t es isomorfa a $D_{1/t}$.

[7] La descripción de K_{10} en términos de la superálgebra de Kaplansky K_3 es uno de los momentos *eureka* que tuve con Georgia. Siempre rodeada de estudiantes y visitantes, solo teníamos una cita semanal de una hora para hacer matemáticas juntos mientras yo estaba de sabático en Wisconsin en el curso 2000–2001. En una de esas citas, discutiendo sobre $F(4)$, Georgia comenzó, como tantas veces, a hacer preguntas naturales e interesantes: *¿cuál es la* superálgebra de Lie de estructura *asociada a K_{10}? ¿Y la superálgebra de Lie de derivaciones?* Un poco de numerología asociada a $F(4)$ nos convenció de que la primera debía de ser la superálgebra ortosimpléctica $\mathfrak{osp}(4,2)$ y la segunda la suma directa de dos copias de $\mathfrak{osp}(1,2)$. La siguiente pregunta de Georgia fue: *y entonces ¿cuál es la estructura de K_{10} como módulo para su superálgebra de derivaciones?* Y en ese momento nos miramos los dos dándonos cuenta de que esa era la clave: K_{10} tenía que ser necesariamente la suma directa de un módulo trivial (generado por la unidad) y el producto tensorial del módulo irreducible de dimensión 3 para cada una de las dos copias de $\mathfrak{osp}(1,2)$. Pero este módulo es K_3, de modo que se tiene $K_{10} = \mathbb{F}1 \oplus (K_3 \otimes_{\mathbb{F}} K_3)$ con una multiplicación natural, y esto es válido para cuerpos arbitrarios de característica distinta de 2. Había que comprobar muchos detalles, lo que llevó un par de semanas, pero el resultado estaba allí. Ivan Shestakov obtuvo, independientemente, un resultado análogo para característica 3.

Kevin McCrimmon comprobó en 2005 que, solo sobre cuerpos de característica 5, K_{10} satisface la versión *súper* de $\mathrm{ch}_3(x) = 0$ y, por tanto, puede usarse en la cuarta fila de la construcción de Tits.

Así pues, el cuadrado mágico de Freudenthal en la tabla 1 puede extenderse a un *rectángulo supermágico* [12, Table 2], véase la tabla 2.

$\mathcal{T}(C,J)$	$H_3(\mathbb{F})$	$H_3(\mathbb{F}\times\mathbb{F})$	$H_3(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}))$	$H_3\big(\mathcal{C}(\mathbb{F})\big)$	$J^{0\|2}$	D_t	K_{10}
$\mathbb{F}$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{a}_1$	$B(0,1)$	$B(0,1)\oplus B(0,1)$
$\mathbb{F}\times\mathbb{F}$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2\oplus\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_5$	$\mathfrak{e}_6$	$B(0,1)$	$A(1,0)$	$C(3)$
$\mathrm{Mat}_2(\mathbb{F})$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{a}_5$	$\mathfrak{d}_6$	$\mathfrak{e}_7$	$B(1,1)$	$D(2,1;t)$	$F(4)$
$\mathcal{C}(\mathbb{F})$	$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{e}_8$	$G(3)$	$F(4)$ $(t=2)$	$\mathcal{T}(\mathcal{C}(\mathbb{F}),K_{10})$ (char 5)

Tabla 2: Rectángulo supermágico.

De este modo, las superálgebras de Lie simples clásicas excepcionales $D(2,1;t)$, $G(3)$ y $F(4)$ también se pueden obtener mediante la construcción de Tits.

Además, en característica 5 aparece una superálgebra de Lie simple que es específica de esta característica: $\mathcal{T}\big(\mathcal{C}(\mathbb{F}),K_{10}\big)$. Su parte par es isomorfa al álgebra de Lie ortogonal $\mathfrak{b}_5$, mientras que su parte impar es el módulo espín para su parte par, por lo que su dimensión es 87. Esta superálgebra de Lie apareció por primera vez en [11] y, en la notación de [10], se denota $\mathfrak{el}(5;5)$.

Las superálgebras de Lie simples clásicas presentan descomposiciones como en (1.1) y esto permite definir superálgebras de Lie graduadas por los sistemas de raíces de las superálgebras de Lie simples clásicas. La situación es más complicada por la ausencia de reducibilidad completa para las representaciones de las superálgebras de Lie simples, por lo que su definición requiere algún cambio. La descripción de estas superálgebras se obtuvo en una serie de trabajos [3, 5, 6, 7, 19] de Benkart, Elduque, Martínez y Zelmanov.

La investigación de Georgia Benkart cubre un abanico muy amplio pero, como decíamos al principio, buena parte de su trabajo se centra en las álgebras de Lie y sus conexiones con otro tipo de álgebras, que las *coordinatizan*. Espero que estas pinceladas que aquí se han mostrado ayuden a comprender parte de este trabajo y a apreciar la belleza que hay en él.

Referencias

[1] B. Allison, G. Benkart y Y. Gao, Lie algebras graded by the root systems BC_r, $r \geq 2$, *Mem. Amer. Math. Soc.* **158** (2002), no. 751, x+158 pp.

[2] G. Benkart y A. Elduque, A new construction of the Kac Jordan superalgebra, *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), no. 11, 3209–3217.

[3] G. Benkart y A. Elduque, Lie superalgebras graded by the root systems $C(n)$, $D(m,n)$, $D(2,1;\alpha)$, $F(4)$, $G(3)$, *Canad. Math. Bull.* **45** (2002), no. 4, 509–524.

[4] G. Benkart y A. Elduque, The Tits construction and the exceptional simple classical Lie superalgebras, *Q. J. Math.* **54** (2003), no. 2, 123–137.

[5] G. Benkart y A. Elduque, Lie superalgebras graded by the root system $A(m,n)$, *J. Lie Theory* **13** (2003), no. 2, 387–400.

[6] G. Benkart y A. Elduque, Lie superalgebras graded by the root system $B(m,n)$, *Selecta Math. (N.S.)* **9** (2003), no. 3, 313–360.

[7] G. Benkart, A. Elduque y C. Martínez, $A(n,n)$-graded Lie superalgebras, *J. Reine Angew. Math.* **573** (2004), 139–156.

[8] G. Benkart y E. Zelmanov, Lie algebras graded by finite root systems and intersection matrix algebras, *Invent. Math.* **126** (1996), no. 1, 1–45.

[9] S. Berman y R. V. Moody, Lie algebras graded by finite root systems and the intersection matrix algebras of Slodowy, *Invent. Math.* **108** (1992), no. 2, 323–347.

[10] S. Bouarroudj, P. Grozman y D. Leites, Classification of finite dimensional modular Lie superalgebras with indecomposable Cartan matrix, *SIGMA* **5** (2009), 060, 63 pp.

[11] A. Elduque, Some new simple modular Lie superalgebras, *Pacific J. Math.* **231** (2007), no. 2, 337–359.

[12] A. Elduque, Tits construction of the exceptional simple Lie algebras, *Pure Appl. Math. Q.* **7** (2011), no. 3, Special Issue: In honor of Jacques Tits, 559–586.

[13] H. Freudenthal, Lie groups in the foundations of geometry, *Advances in Math.* **1** (1964), no. 2, 145–190.

[14] T. Halverson y A. Ram, Gems from the work of Georgia Benkart, *Notices Amer. Math. Soc.* **69** (2022), no. 3, 375–384.

[15] V. G. Kac, Lie superalgebras, *Advances in Math.* **26** (1977), no. 1, 8–96.

[16] V. G. Kac, Classification of simple $\mathbb{Z}$-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras, *Comm. Algebra* **5** (1977), no. 13, 1375–1400.

[17] I. L. Kantor, Classification of irreducible transitive differential groups, *Soviet Math. Dokl.* **5** (1965), 1404–1407. Original en ruso: *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **158** (1964), 1271–1274.

[18] M. Koecher, Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras. I, *Amer. J. Math.* **89** (1967), 787–816.

[19] C. Martínez y E. Zelmanov, Lie superalgebras graded by $P(n)$ and $Q(n)$, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **100** (2003), no. 14, 8130–8137.

[20] K. McCrimmon, *A taste of Jordan algebras*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2004.

[21] J. Tits, Une classe d'algèbres de Lie en relation avec les algèbres de Jordan, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 65 = *Indag. Math.* **24** (1962), 530–535.

[22] J. Tits, Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionnelles. I. Construction, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 69 = *Indag. Math.* **28** (1966), 223–237.

[23] E. I. Zelmanov, Primary Jordan algebras, *Algebra i Logika* **18** (1979), no. 2, 162–175.

Alberto Elduque, Departamento de Matemáticas e Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones, Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza, Spain
Correo electrónico: elduque@unizar.es