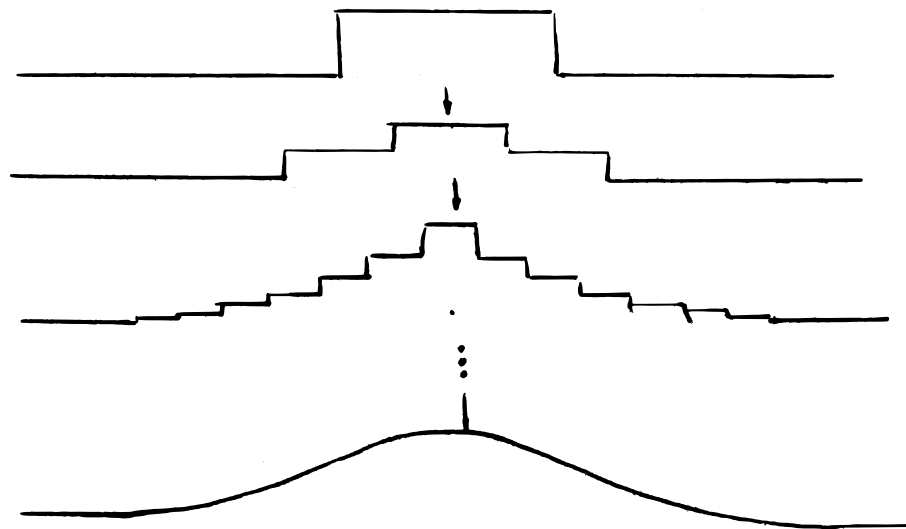


CELEBRATIO MATHEMATICA

Behind the scenes of the wavelet revolution

INGRID DAUBECHIES' LETTERS TO YVES MEYER



a special project of



with support from





Stéphane Mallat, Yves Meyer, Ingrid Daubechies and Emmanuel Candès in a photograph by Stéphane Jaffard, taken in Oslo in 2017 just after Meyer's Abel Prize lecture.

Behind the Scenes of the Wavelet Revolution

INGRID DAUBECHIES' LETTERS TO YVES MEYER

With an introduction by Yves Meyer

ISBN 978-1-935107-04-0

Published in 2020 by Celebratio Mathematica (celebratio.org), an imprint of Mathematical Sciences Publishers.

Photo credit: Copyright © 2020 Stéphane Jaffard. Reproduced with permission. All rights reserved.



Mathematical Sciences Publishers
798 Evans Hall #3840
c/o Department of Mathematics
University of California
Berkeley, CA 94740-3840

©2020 Mathematical Sciences Publishers

Foreword

This volume is a compilation and transcription of the extant holograph letters from Ingrid Daubechies to Yves Meyer. Scans of the holograph pages, along with the transcriptions included here, are catalogued and displayed on the archive [Celebratio Mathematica](#).¹

Our aim in offering this volume to the public is to make the collection easy to peruse in its entirety: readers will find here our typeset versions of the original French texts juxtaposed with their English translations. Yves Meyer provides an introduction to explain the mathematical significance of the letters and to flesh out the circumstances of their writing.

The collection came to light when I asked Yves (who was then Professor Meyer to me) about a particular letter from Ingrid (dated March 12, 1987) which he mentioned in some remarks addressed to the editor of the *American Scientist* (see “Letters to the editor” in vol. 85, no. 3, 1997, pp. 204–206). There Yves described the role of Stéphane Mallat’s prior work and that of his own in what Ingrid accomplished in January–February 1987: the construction of smooth orthogonal wavelets of compact support.

Taking a historical perspective, Daubechies’s construction belongs [...] to Mallat’s program. Although this statement may be construed to mean that Daubechies merely treated a special example that arose from someone else’s great vision, that was never my opinion. I always knew that a large gap existed between the formalism that I developed with Mallat and what Daubechies achieved. When one tries to apply this formalism, many problems occur immediately. The first one concerns the stability of the construction, and the second one is related to the desired regularity. These difficulties require a subtle and difficult analysis, which was achieved by Ingrid and could not be discovered by ordinary human beings.

I kept a beautiful seven-page letter that Daubechies wrote to me at the time she was working on her construction, explaining how she discovered the bases. Mallat’s algorithm was not the starting point, but it did play a role as an ingredient.

Yves’ remarks piqued my curiosity. I wrote to him and asked if he would consider letting us include Ingrid’s letter in our *Celebratio* volume on her work, assuming we could get her agreement as well. I feared he would say no. Yet he wrote back promptly (and with characteristic generosity, as I would soon learn) to say that he would look for the letter in question, but that he was traveling and away from his office, and could only do so on his return.

Yves did look, and that’s how this collection came to light, for there was not only the *lettre sublime*, as he called it (eight handwritten pages, in fact), but a folder full of handwritten correspondence: letters and notes from Ingrid spanning the years 1985–2002, the decades of the momentous shift from postal mail to email.

I’m grateful to Yves and Ingrid for their extraordinary generosity in letting us share these letters with our readers. Yves freely gave of his time to review the English translations and correct our typeset

¹*Celebratio Mathematica* is a public interest project of [Mathematical Sciences Publishers](#) ([msp.org](#)), a nonprofit scientific publisher headquartered in Berkeley, California.

versions (French and English), even as he was fully engaged in new mathematical research and was trying to complete publishing projects of his own. Ingrid trusted Yves and me both to handle the personal and visionary content of these letters with care.

I want to thank Silvio Levy, Director of Publishing at MSP, who translated the letters from the French, and whose rigorous attention to detail was invaluable; Hélène Barcelo, Deputy Director of the Mathematical Sciences Research Institute (MSRI), who helped secure critical financial support for *Celebratio*'s Daubechies volume; Georgia Benkart, whose leadership as the Chair of the Committee on Women in Mathematics at MSRI has helped make possible a series of *Celebratio* volumes of women mathematicians, including this one; and Elizabeth Weaver, Senior Editor at MSP, who catalogued the Daubechies letters in preparation for this project.

Sheila Newbery
Managing Editor
Celebratio Mathematica

Introduction

YVES MEYER

The letters which are displayed here provide a breathtaking diary of Ingrid Daubechies' scientific achievements on wavelets.

The wavelet revolution blew up in the early eighties. It created an immense enthusiasm and an unusual understanding between scientists working in completely distinct fields. We believed that barriers in communication would disappear for ever. We thought we were building a united science. How did this start? It began in the sixties. David Hubel and Torsten Wiesel had discovered that some proto-wavelets were seminal in the functioning of the primary visual cortex of mammals. In his famous book (*Vision*, MIT Press, 1982) David Marr proposed a fascinating algorithm which could emulate this processing. Jacques Magnen, <https://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=168243> Roland S  n  or, and Kenneth Wilson, were using some other proto-wavelets in quantum field theory. Phase space localization was the favorite tool of James Glimm and Arthur Jaffe. Unfolding a signal in the time frequency plane was proposed by Eugene Wigner in the thirties. Wigner's motivation was quantum mechanics. Wigner was followed by Dennis Gabor <https://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=134533> and Claude Shannon in the forties. In mathematics Alberto Calder  n had already introduced a variant of a wavelet analysis as an alternative to Fourier analysis. In the late seventies wavelets were popping up everywhere. But the needed unification was still missing until the French geophysicist Jean Morlet (1931–2007) made the fundamental discovery which is described now. Morlet was working for the Oil company Elf Aquitaine (now Total) and his research was motivated by problems encountered in analyzing some reflected seismic waves. These seismic waves were a key tool in oil prospecting. Working on these specific signals, Morlet experimented with the flaws of windowed Fourier analysis. Then he introduced a revolutionary method which would later be named “wavelet analysis” and observed that this new tool was more efficient than what was used before. Twenty years later he was awarded the Reginald Fessenden Prize. In 1997 Pierre Goupillaud introduced Jean Morlet with these words:

Morlet performed the exceptional feat of discovering a novel mathematical tool which has made the Fourier transform obsolete after 200 years of uses and abuses, particularly in its fast version. . . . Until now, his only reward for years of perseverance and creativity in producing this extraordinary tool was an early retirement from ELF.

Goupillaud was right. Soon after his discovery Morlet was fired by ELF and suffered a breakdown. At that time Morlet had a vision without a proof and needed some help. Alex Grossmann (1930–2019), a physicist at the Centre de Physique Th  orique, Marseilles-Luminy, listened to Morlet with much patience and sympathy. Finally Alex understood Morlet's claim and gave it the sound mathematical formulation which is described now.

Let $s(t)$ be a signal with a finite energy. Its wavelet transform $W(a, x)$ is a continuous function of two variables $a > 0$ and $x \in \mathbb{R}$. This wavelet transform depends on the signal $s(t)$ but also on the wavelet ψ

which is used in the analysis. How much the choice of this wavelet will affect the results is an important problem. Before discussing it let us return to the definition of the wavelet transform. In this definition $1/a$ is the magnification of the “mathematical microscope” ψ , and x is a real number indicating the place where you want to zoom into the signal $s(t)$. Finally $W(a, x)$ is the cross-correlation $\langle s, \psi_{a,x} \rangle$ between the signal s and the shrunk or dilated wavelet

$$\psi_{a,x} = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{t-x}{a}\right).$$

We have

$$W(a, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi_{a,x}}(t) s(t) dt.$$

The function ψ is named the *analyzing wavelet* (the microscope) and the overline means complex conjugate. This analyzing wavelet shall be a smooth function, localized around 0, and oscillating. This last requirement means $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$. Finally ψ shall be an admissible wavelet: both

$$\int_0^\infty |\widehat{\psi}(u)|^2 \frac{du}{u} = 1 \quad \text{and} \quad \int_0^\infty |\widehat{\psi}(-u)|^2 \frac{du}{u} = 1$$

are needed. Here $\widehat{\psi}$ is the Fourier transform of ψ . Any function ψ which is real valued, smooth, localized, and oscillating becomes an admissible wavelet after multiplication by a suitable constant.

Then Grossmann and Morlet proved that every signal $s(t)$ can be exactly reconstructed by a simple inversion formula. (See A. Grossmann and J. Morlet, “[Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape](#),” *SIAM J. Math. Anal.* **15** (1984), 723–736.) Everything works as if the analyzing wavelets $\psi_{a,x}$ were an orthonormal basis. Indeed under the assumption that ψ is an admissible wavelet we have

$$s(t) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} W(a, x) \psi_{a,x}(t) dx \frac{da}{a}.$$

As it was announced by Morlet, wavelet analysis provides us with a better understanding of signals which cannot be analyzed correctly by a standard windowed Fourier analysis (see D. Gabor, “[Theory of Communication](#),” *Journal of Institution of Electrical Engineers*, **93**:26 (1946), 429–457). This is the case when strong transients occur in the signal. It is also the case for fractal or multifractal signals, as was proved by Alain Arneodo, Uriel Frisch, Giorgio Parisi and their collaborators. Stéphane Jaffard proved that the choice of the analyzing wavelet was not very important as long as ψ is sufficiently smooth, well localized and has enough vanishing moments. The wavelet $\psi(t) = \cos(5t) \exp(-t^2/2)$ (Morlet’s favorite) does not meet this third condition. The integral of ψ is extremely small but does not vanish.

The continuous wavelet analysis of a signal $s(t)$ is highly redundant. For some analyzing wavelets ψ the wavelet transform $W(x, a)$ of a signal $s(t)$ is the solution to a partial differential equation. The analysis of a signal of length N produces N^2 coefficients. In some cases this redundancy can be useful and in other cases the computational load is prohibitive. At the other extreme of the picture we find the Fast Wavelet Transform, which is described below.

The story I am telling now began on January 15, 1985, when I met Alex Grossmann in Marseilles for the first time. A month earlier Jean Lascoux, a physicist and a colleague at Ecole Polytechnique, had

given me a fascinating preprint by Grossmann and Morlet. This preprint was so attractive that I could not resist traveling to Marseilles. I spent three days talking with Alex and I soon became his disciple. I shared his values and ethics. Among these values I would single out an intense curiosity, a great humility, an profound confidence in others and an outstanding capacity for friendship. Alex became a spiritual father and a scientific guide.

In a joint work with Alex and Ingrid we constructed a frame of $L^2(\mathbb{R}^n)$ of the form

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{jn/2} \psi(2^j x - k), \quad j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n,$$

where the analyzing wavelet ψ belongs to the Schwartz class. The wavelet coefficients of a signal $s(t)$ are $c(j, k) = \langle s, \psi_{j,k} \rangle$. These coefficients are still redundant but the reconstruction of the signal $s(t)$ is exact. This ψ is named the mother wavelet since it generates the other wavelets in the frame. Our goal was to build a digital version of wavelet analysis which would be exact. Our work was entitled “[Painless nonorthogonal expansions](#)” and was published in *J. Math. Phys.* **27** (1986), 1271–1283. I had not yet met Ingrid at that time. This explains why in her letter of 1985 (p. 15) Ingrid is eager to meet.

However I was dissatisfied with this result and I wondered if, instead of a frame, I could construct a true orthonormal basis with the same structure. During the Summer of 1985 I did it and I mailed the manuscript to Ingrid. In the Fall of 1985 I gave a lecture at the Courant Institute on this construction. On December 3, 1985, Ingrid acknowledged receipt of my draft and apologized for missing my talk (p. 15). My construction was published six months later as “[Principe d’incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d’opérateurs](#)” (The uncertainty principle, Hilbert base and operator algebras) in *Séminaire Bourbaki*, 38-ème année, February 1986, vol. 1985/86). Using this basis every Schwartz distribution S is encoded as a simple sequence c_k , $k = 0, 1, \dots$ of numbers and the intricate properties of S become simple growth conditions on this sequence c_k . For a functional analyst this was paradise. However such wavelets had infinite supports and were useless in real life problems. One year later Ingrid overcame that obstacle and constructed orthonormal wavelet bases which are smooth (m -continuous derivatives) and compactly supported. The mother wavelet depends on the required regularity m (p. 37). When compared with the deepness of Ingrid’s achievement my construction looks trivial. In her letter of July, 1986 (p. 17), Ingrid wanted to know whether my construction of an orthogonal wavelet basis could be modified in such a way that only fine scales would play a role. She proposed a way for doing it. In a joint work with P-G. Lemarié I had already met this goal. This was published as “[Ondelettes et bases hilbertiennes](#),” *Rev. Mat. Iberoam.* **2**:1-2 (1987), 1–18.

In November 1986 I was invited to give a talk at the University of Chicago. It was the time when Stéphane Mallat was writing his Ph.D. at the Department of Computer and Information Science of the University of Pennsylvania. Stéphane was eager to talk with me and we met at Eckhart Hall. Stéphane went there with some breaking news. He had discovered that the construction of orthonormal wavelet bases was obeying the same algebraic rules as the design of quadrature mirror filters. These filters were already a subject of intense investigation in electrical engineering. Stéphane was bridging the gap between mathematics and electrical engineering. We had three days of intense work in Professor Zygmund’s office. Antoni Zygmund was still alive but let us freely use his office. My main contribution to this discussion was to warn Stéphane that the iterative procedure yielding wavelets could diverge when applied to some “bad” quadrature mirror filters (see D. Esteban and C. Galand, “[Application of quadrature mirror filters to split band voice coding schemes](#),” *Proc. IEEE ICASSP* (1977), 191–195).

This point was going to be fully understood a few years later by Albert Cohen and Ingrid. Moreover we were unable to characterize the “good” quadrature mirror filters that yield smooth wavelets after iteration. A few months later Ingrid solved these two problems and achieved her splendid construction of orthonormal bases of compactly supported smooth wavelets; see the letter dated February 22, 1987 (p. 25) and the letter of February 24 (p. 35), written two days later. In these two letters Ingrid explains her constructive vision of compactly supported scaling functions and wavelets. This vision was consistent with the framework introduced by Mallat and me, while bringing completely novel insight to the needed algebraic manipulations to obtain the filter banks that ensure both compact support and smoothness on the resulting wavelets. A month later Ingrid sent me the magnificent letter of March 12, 1987 (p. 37) where she describes her construction of orthonormal wavelet bases with compact support.

As indicated in her letter of February 22 (p. 25), Ingrid was concerned with a problem raised by scientists working in computer vision. They wanted some even (or odd) wavelets while Ingrid had proved that the Haar system is the only compactly supported orthonormal wavelet basis with this property. That is why Ingrid and Albert Cohen constructed smooth and symmetrical biorthogonal wavelets (the ones which are used in the compression standard JPEG2000). I was eager to publish their beautiful paper in *La Revista Matemática Iberoamericana* and Ingrid sent me three copies for submission to this journal. It was a time when e-mail did not exist and a paper version of an article was still needed to submit it. In the letter dated December 1, 1987 (p. 49) Ingrid says how much she is sorry for the death of my mother. Let me say today how much I was so moved by your kind letter, dear Ingrid. In On January 15, 1990 (p. 51) Ingrid acknowledges receipt of my book and begins discussing time-frequency wavelets.

The panorama dramatically changed around 1990. Motivated by a problem raised by Kenneth Wilson, Ingrid, in a joint work with Stéphane Jaffard and Jean-Lin Journé, constructed an orthonormal basis of time-frequency wavelets. The problem solved by Ingrid et al. has a long history. It was raised by Dennis Gabor in 1946. Gabor thought that the functions

$$\exp(2\pi i k x) \exp(-(x-l)^2/2), \quad k, l \in \mathbb{Z},$$

could be a basis of $L^2(\mathbb{R})$. When he raised this issue Gabor anticipated the digital revolution. He tried to find an efficient way to encode a speech signal. He believed that a speech signal $s(x)$ could be encoded as a short sequence of numbers $c(k, l)$, $k, l \in \mathbb{Z}$. These numbers would have been the coefficients of $s(x)$ in the Gabor basis. Unfortunately Gabor was wrong and the Gabor basis is not a basis. Something was missing. It is like omitting the number 7 in arithmetic. Ingrid could fix the problem and her discovery (a joint work with Jaffard and Journé) happened to be seminal in the detection of gravitational waves (see Sergey Klimenko et al., “Observing gravitational-wave transient GW150914 with minimal assumptions” at <https://dcc.ligo.org/LIGO-P1500229/public/main>).

In the letter of April 12, 1990 (p. 55), Ingrid is interested in the application of wavelets to scientific computing. She discusses a new algorithm discovered by Greg Beylkin, Ronald Coifman and Vladimir Rokhlin. The goal is to accelerate the computation of the product of two large $N \times N$ matrices under the hypothesis that these matrices are almost diagonal in a wavelet basis. The charming letters of December 7, 1990 (p. 59) and January 15, 1991 (p. 61) offer a moving picture of a pregnant Ingrid.

The letter on page 67 is not dated but I would say that it was written circa 1992 since Ingrid’s daughter Caroline begins to walk. Soon after the construction by Ingrid et al. of orthonormal bases of time-frequency wavelets Coifman and I found another solution in which the time segmentation could be

arbitrarily imposed. In the undated letter, Ingrid with her usual fairness stresses that we should mention the contributions of H. Malvar, J. P. Princen, and A. B. Bradley who anticipated our construction under the name of *lapped transforms*. And Martin Vetterli should not be forgotten! Orthonormal bases of time-scale wavelets previously existed under the name of quadrature mirror filters, as Mallat discovered. Similarly orthonormal bases of time-frequency wavelets already existed as lapped transforms. Analysts should be modest. But in the undated 1992 letter, Ingrid is mostly discussing the construction of an orthonormal wavelet basis on a given interval. Everything needs to be localized on this specific interval, which was not the case for the preceding constructions. This paves the way to the problems discussed in the letter of 2002 (p. 75).

This letter is extremely interesting and exemplifies the differences between Ingrid and me. Ingrid is at the same time a mathematician, a physicist and a scientist. She immediately perceived the talent of Wim Sweldens. Ingrid wished that Wim would be hired by Princeton. Princeton asked for my advice. Before giving my opinion I wrote several emails to Ingrid. Ingrid finally answered but her mail broke down while she was writing. This was fortunate and we have this long and beautiful letter. Ingrid discusses the relevance of mathematics in programming and states that efficient algorithms shall be based on good and deep mathematics. This is a marvelous statement. Finally Wim moved to high tech and is famous for several spectacular innovations.

Ingrid's letters offer a genuine insight into this exceptional decade in which wavelet analysis was elaborated. In these letters Ingrid is actively present with her scientific vision, her enthusiasm, her doubts, her fairness, and her extraordinary ability to communicate. Ingrid trusted me and never hesitated to unveil her deepest thoughts and feelings. Thanks, Ingrid!

THE LETTERS

EDITOR'S NOTE: The typeset texts of the letters are arranged here chronologically, with the English translation and the French text interleaved on facing pages. Where letters were written on institutional letterhead, this information is included at the top of the first page. Each of the letters presented here is transcribed from a handwritten original, and the reader can view scans of the originals by following the links supplied in the list of references.

Dates are everywhere transcribed from Ingrid Daubechies' own hand, exactly as she indicated them. We have supplied dates for undated letters to the best of our ability from internal evidence, with all such conjectures indicated in brackets in red type near the top of the page. For example, [1992, undated] indicates that we can guess the year with confidence, but cannot guess the exact date.

All figures are in Daubechies' own hand, as they originally appeared.

Vrije Universiteit Brussel
Fakulteit der Wetenschappen
Theoretische Natuurkunde
Prof. J. Reignier

1050 Brussel, December 3, '85
Pleinlaan 2
Tel.: 02/641.32.40 - 641.32.41

Dear Professor,

I attach copies of notes that I recently wrote for Alex Grossmann and that, I think, might be of interest to you too. They contain results that I obtained some weeks ago about frames constructed using the same procedure as those in the article "[Painless...](#)", both for the Weyl–Heisenberg group and for the $ax + b$ group. The difference is that these new frames are no longer based on functions of compact support.

I would also like to thank you for sending me copies of your manuscript "La transformation en ondelettes" [The wavelet transformation], with the construction of your orthogonal basis, which I found very beautiful. I was so sorry to have missed your New York seminar on this subject: just three days earlier I was still at Courant! But I had to be back in Brussels on the 22nd. All the more pity because this seminar would have been an opportunity to finally meet you, and if you had the time, to discuss with you some of my new examples, which I attach. If these results are of interest to you, would you have the time to discuss them when you visit Marseille in two weeks? I will be there too, and I will be delighted to be able to meet you.

Ingrid Daubechies

Vrije Universiteit Brussel
Fakulteit der Wetenschappen
Theoretische Natuurkunde
Prof. J. Reignier

1050 Brussel, December 3, '85
Pleinlaan 2
Tel.: 02/641.32.40 - 641.32.41

Monsieur le Professeur,

Ci-joint je vous envoie des copies de notes que je viens de rédiger pour Alex Grossmann et qui, je crois, pourraient vous intéresser aussi. Il s'agit de résultats que j'ai obtenus il y a quelques semaines, concernant des "frames" construits selon le même procédé que ceux dans l'article "[Painless...](#)", aussi bien pour le groupe de Weyl–Heisenberg que pour le groupe $ax + b$. La différence est que ces nouveaux "frames" ne sont plus basés sur des fonctions à support compact.

Je voudrais encore vous remercier de m'avoir envoyé des copies de votre manuscrit "La transformation en ondelettes", avec la construction, que j'ai trouvée très belle, de votre base orthogonale. J'étais désolée de rater votre séminaire à ce sujet à New York: j'étais encore à Courant trois jours avant! Mais le 22, je devais être rentrée à Bruxelles. J'étais d'autant plus désolée que ce séminaire m'aurait aussi donné l'occasion de vous rencontrer enfin et, si vous aviez le temps, de discuter avec vous de mes nouveaux exemples, que je vous envoie ci-joints. Si ces résultats vous intéressent, pourrions-nous en discuter lors de votre visite à Marseille, dans deux semaines, si vous avez le temps? J'y serai aussi, et je serais enchantée de faire votre connaissance.

Ingrid Daubechies

Vrije Universiteit Brussel
Fakulteit der Wetenschappen
Theoretische Natuurkunde
Prof. J. Reignier

1050 Brussel, July 29, '86
Pleinlaan 2
Tel.: 02/641.32.40 - 641.32.41

Dear Yves,

How are you? Thierry told me that you'd been very ill, but I hope you're fully recovered?

The conference in Marseille was very interesting. I met there, among others, Paul Federbush, an American physicist from Ann Arbor (Michigan), who was interested in your basis. For the applications he has in mind, he wanted a basis constructed also from dilatations and translations, but one that would stop at a certain scale, instead of using ever bigger cubes. Somewhat like the Haar basis: instead of taking



we would take



(stopping at a certain scale, and adding one more function for that scale).²

Federbush's question was then whether the same thing is possible with your basis. And the answer of course is yes. Obviously I'm not telling you anything new: it's all there in your construction, implicitly.

²Our editor posed a question while formatting this letter: "Should I remove the period after the second diagram?" Meyer responded: "Blaise Pascal, the French mathematician and philosopher described the human being as lost between two infinities: the infinitely large (the Universe) and the infinitely small (the atoms). Pascal said he was scared. "Le silence éternel de ces espaces infinis m'effraie", he wrote. Before Ingrid's letter, wavelet analysis could be understood as traveling across scales and starting with the Milky Way, then finding the solar system and then the earth and then the United States and then California and then Berkeley and then you, dear reader, and then the cells of your body... It is a travel across scales, beginning with the huge and ending with the microscopic. What Paul Federbush was looking for is a wavelet analysis which would start, say at Berkeley, and then find you, reader, and then dig even deeper into your cells, and stop at your atoms. Ingrid discovered that in her letter. It is crucial. This explanation is needed for answering your question about punctuation at the end of the pictures. Ingrid put this period to insist on the fact that the scales stop there. In the picture, small scales are on the left, and, reading from left to right, we move from small scales to larger ones. And then we stop at scale one. The period is CRUCIAL. Do not erase it."

Cher Yves,

Comment vas-tu? Thierry m'a raconté que tu avais été très malade; j'espère que tu es complètement remis?

La conférence à Marseille était très intéressante. J'y ai rencontré, entr'autres, un physicien américain, du nom de Paul Federbush, d'Ann Arbor (Michigan), qui était fort intéressé par ta base. Pour les applications dont il a besoin, il préférait une base qui se contruisait aussi par dilatations et translations, mais qui s'arrêterait à une certaine échelle, au lieu d'utiliser des cubes toujours plus grands. Un peu comme dans la base de Haar: au lieu de prendre



on prendrait



(en s'arrêtant à une échelle fixée, et en ajoutant une fonction en plus à cette échelle-là).³

La question de Federbush était donc de savoir si la même chose était possible avec ta base. Et la réponse est oui, évidemment. Je ne t'apprends sans doute rien de nouveau: tout se trouve déjà implicitement dans ta construction.

³Dans son travail de mise en page de cette lettre notre éditeur a été amené à poser la question suivante : "Dois-je supprimer le point qui termine le second diagramme?" Meyer a répondu: "Pour le mathématicien et philosophe français Blaise Pascal, l'homme est perdu entre deux infinis: l'infiniment grand (l'Univers) et l'infiniment petit (les atomes). Pascal nous fait part de son angoisse en écrivant: "Le silence éternel de ces espaces infinis m'effraie". Avant cette lettre d'Ingrid, l'analyse par ondelettes pouvait être interprétée comme un voyage à travers les échelles où, en partant de la Voie lactée, on trouverait le Système solaire, puis la Terre, ensuite les Etats Unis, la Californie, Berkeley et enfin vous, cher lecteur, puis les cellules de votre corps... Un voyage à travers les échelles qui commence par l'immense pour finir dans le microscopique. Ce que cherchait Paul Federbush est une analyse par ondelettes qui commencerait — disons à Berkeley — et ensuite vous trouverait, cher lecteur, et ensuite creuserait plus profondément pour trouver vos cellules et vos atomes. Ingrid a trouvé cela et l'explique dans sa lettre. C'est une découverte cruciale. Ceci explique la ponctuation à la fin du diagramme. Ingrid a mis ce point de ponctuation pour insister sur le fait que les échelles s'arrêtent à cet endroit. Dans le diagramme les petites échelles se trouvent à gauche et, en lisant de la gauche vers la droite, on effectue un zoom arrière en allant des petites vers les grandes échelles. Et on s'arrête à l'échelle un. Le point est CRUCIAL. Ne l'effacez pas.

It suffices to take (in n dimensions)

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{\psi_Q^{(\varepsilon)}; \quad \varepsilon_j = 0 \text{ or } 1, (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \neq (0_1, \dots, 0), \\ Q &= [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)[\quad , k \in \mathbb{Z}^n, ? = (1, \dots, 1), \\ j &\in \mathbb{Z} \quad \text{and} \quad \underline{j \geq j_0}\end{aligned}$$



We stop at step j_0 ; the largest
cubes considered to
have a side of length 2^{-j_0} .

$$\cup \{\psi_{j_0, \tilde{k}}^{(0, \dots, 0)}; \tilde{k} \in \mathbb{Z}^n\}$$

where

$$\psi_{j_0, \tilde{k}}^{(0, \dots, 0)}(x) = 2^{nj_0/2} \prod_{m=1}^n \varphi(2^{j_0} x_m)$$

(with the same notation as in your article with P. G. Lemarié). It is easy to see that

$$(\psi_{j_0, \tilde{k}}^{(0, \dots, 0)}, \psi_{j_0, \tilde{k}'}^{(0, \dots, 0)}) = \delta_{\tilde{k}, \tilde{k}'} \quad (*)$$

(essentially because $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(t + 2\pi l)|^2 = 1$). If I set

$$D_j^{(\varepsilon)} = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ \tilde{k}}} \langle \cdot, \psi_{Q_{j, \tilde{k}}}^{(\varepsilon)} \rangle \psi_{Q_{j, \tilde{k}}}^{(\varepsilon)}$$

$$(\text{where } Q_{j, \tilde{k}} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)[= \prod_{m=1}^n [2^{-j}k_m, 2^{-j}(k_m+1)[\quad)$$

$$D_j = \sum_{(\varepsilon) \neq (0, \dots, 0)} D_j^{(\varepsilon)}$$

$$\text{and } E_j = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ \tilde{k}}} \langle \cdot, \psi_{j, \tilde{k}}^{(0, \dots, 0)} \rangle \psi_{j, \tilde{k}}^{(0, \dots, 0)}$$

then we have (as you showed me),

$$D_j = E_{j+1} - E_j \quad (\text{even in } n \text{ dimensions}).$$

It follows that

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} D_j = \mathbb{1} - E_{j_0} \quad (\text{in the strong limit sense}),$$

and so

$$\left(\sum_{j=j_0}^{\infty} D_j \right) \psi_{j_0, \tilde{k}}^{(0, \dots, 0)} = 0$$

because $E_{j_0} \psi_{j_0, \tilde{k}}^{(0, \dots, 0)} = \psi_{j_0, \tilde{k}}^{(0, \dots, 0)}$ by (*). It follows that

Il suffit de prendre (en n dimensions)

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{\psi_Q^{(\varepsilon)}; \quad \varepsilon_j = 0 \text{ or } 1, (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \neq (0_1, \dots, 0), \\ Q &= [2^{-j} \tilde{k}, 2^{-j}(\tilde{k} + 1)[\quad, \tilde{k} \in \mathbb{Z}^n, \tilde{?} = (1, \dots, 1), \\ j &\in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \underline{j \geq j_0} \} \end{aligned}$$



On s'arrête à l'échelle j_0 ; les plus
gros cubes considérés ont
un côté de largeur 2^{-j_0} .

$$\cup \{\psi_{j_0, \tilde{k}}^{(0, \dots, 0)}; \tilde{k} \in \mathbb{Z}^n\}$$

où

$$\psi_{j_0, \tilde{k}}^{(0, \dots, 0)}(x) = 2^{nj_0/2} \prod_{m=1}^n \varphi(2^{j_0} x_m)$$

avec les mêmes notations que dans ton article avec P. G. Lemarié). Il est facile de voir que

$$(\psi_{j_0, \tilde{k}}^{(0, \dots, 0)}, \psi_{j_0, \tilde{k}'}^{(0, \dots, 0)}) = \delta_{\tilde{k}, \tilde{k}'} \quad (*)$$

(essentiellement parce que $\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(t + 2\pi l)|^2 = 1$). Si je dénote

$$D_j^{(\varepsilon)} = \sum_{\tilde{k} \in \mathbb{Z}^n} \langle \cdot, \psi_{Q_{j, \tilde{k}}}^{(\varepsilon)} \rangle \psi_{Q_{j, \tilde{k}}}^{(\varepsilon)}$$

$$(\text{où } Q_{j, \tilde{k}} = [2^{-j} \tilde{k}, 2^{-j}(\tilde{k} + 1)[= \prod_{m=1}^n [2^{-j} k_m, 2^{-j}(k_m + 1)[\quad)$$

$$D_j = \sum_{(\varepsilon) \neq (0, \dots, 0)} D_j^{(\varepsilon)}$$

$$\text{et } E_j = \sum_{\tilde{k} \in \mathbb{Z}^n} \langle \cdot, \psi_{j, \tilde{k}}^{(0, \dots, 0)} \rangle \psi_{j, \tilde{k}}^{(0, \dots, 0)}$$

alors (comme tu l'as montré),

$$D_j = E_{j+1} - E_j \quad (\text{même en } n \text{ dimensions}).$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} D_j = \mathbb{1} - E_{j_0} \quad (\text{au sens de la limite forte}),$$

et donc

$$\left(\sum_{j=j_0}^{\infty} D_j \right) \psi_{j_0, \tilde{k}}^{(0, \dots, 0)} = 0$$

puisque $E_{j_0} \psi_{j_0, \tilde{k}}^{(0, \dots, 0)} = \psi_{j_0, \tilde{k}}^{(0, \dots, 0)}$ par (*). Il en resulte que

- 1) $\langle \psi_{j, \tilde{k}}^{(\epsilon)}, \psi_{j_0, \tilde{k}'}^{(0, \dots, 0)} \rangle = 0$ for every $(\epsilon) \neq (0, \dots, 0)$, every $j \geq j_0$ and every $k, k' \in \mathbb{Z}^n$;
- 2) the set of vectors $\mathcal{B}$ is therefore an orthonormal set;
- 3) the set of vectors $\mathcal{B}$ is an orthonormal basis (since $\sum_{j=j_0}^{\infty} D_j + E_{j_0} = \mathbb{1}$).

Paul Federbush assured me that all that is very useful to him for using in constructive field theory (I myself don't know anything about that).

Could you please send me your most recent papers about wavelets? I will be in Brussels in August, in Marseille in September and in New York from October on.

With all my friendship,
Ingrid

1) $\langle \psi_{j,\tilde{k}}^{(\epsilon)}, \psi_{j_0,\tilde{k}'}^{(0,\dots,0)} \rangle = 0$ pour tout $(\epsilon) \neq (0, \dots, 0)$, pour tout $j \geq j_0$ pour tout $k, k' \in \mathbb{Z}^n$;

2) l'ensemble des vecteurs $\mathcal{B}$ est donc un ensemble orthonormal;

3) l'ensemble des vecteurs $\mathcal{B}$ est une base orthonormale (puisque $\sum_{j=j_0}^{\infty} D_j + E_{j_0} = \mathbb{1}$).

Paul Federbush m'a assuré que tout ceci lui était extrêmement utile pour la théorie constructive des champs (dont je ne connais rien moi-même).

Pourrais-tu, s'il-te-plaît, m'envoyer tes derniers papiers sur les ondelettes? Je serai à Bruxelles en août, à Marseille en septembre, et à New York à partir d'octobre.

Avec toutes mes amitiés,
Ingrid

Vrije Universiteit Brussel
Fakulteit der Wetenschappen
Theoretische Natuurkunde
Prof. J. Reignier

1050 Brussel, August 26, '86
Pleinlaan 2
Tel.: 02/641.32.40 - 641.32.41

Dear Yves,

Thank you for the offprint!

I'm sure you've also received the letters from Paul Federbush and Guy Battle asking about the possibility of constructing a wavelet basis with exponential localization. I replied to them, by return post, that your basis already has all the properties that they wish for. I should add that I had already sent them copies of your papers and explained to them your construction at the conference in Marseille. I don't know what they were thinking.

Sincerely,
Ingrid

Vrije Universiteit Brussel
Fakulteit der Wetenschappen
Theoretische Natuurkunde
Prof. J. Reignier

1050 Brussel, 26 Août '86
Pleinlaan 2
Tel.: 02/641.32.40 - 641.32.41

Cher Yves,

Merci pour le tiré à part!

Tu as sans doute aussi reçu les lettres de Paul Federbush et Guy Battle, concernant la possibilité d'une base d'ondelettes avec localisation exponentielle. Je leur ai répondu, par retour du courrier, que ta base a déjà toutes les propriétés qu'ils désirent. Je leur avais pourtant envoyé des tirés à part de tes papiers, et je leur avais expliqué ta construction, à la conférence à Marseille. Je ne sais pas ce qui leur a pris.

Sincèrement,
Ingrid

Courant Institute of Mathematical Sciences

251 Mercer Street

New York, N.Y. 10012

Telephone: (212) 460-7100

February 22, '87

Dear Yves,

How are you? I've been meaning to write for a long time, and I'm a bit embarrassed that I've waited so long. But here finally are some news.

Ann Arbor has offered us, Robert and me both, associate professorships ("with tenure"). They told me that they were quite impressed by your letter of recommendation, for which I would like to thank you again. Moreover, Bell Laboratories has also made me an offer (Robert is working there already). We have to decide before March 1 (one week to go...) If it were only up to me, I think I'd likely go for Ann Arbor: I like the area very much, and it is a good university. And I would learn a lot of math there. On the other hand, Robert is rather more attached to Bell Labs than I thought (and than he himself thought, in fact), and, since I don't want to start our marriage by taking him away from Bell when he likes it there, we will probably opt for the Bell alternative. Actually I think I'll enjoy Bell too, quite a bit: there are very good mathematicians there too, and they give their researchers a lot of freedom. You'd said that, if we went to Ann Arbor, you'd come visit us — Robert and me and the kids. I hope you will come see us even if we cast our lot with Bell! I think you will find interesting certain of the mathematicians (Andrew Odlyzko, Ron Graham, Larry Shepp, Jeff Lagarias, Neil Sloane, ...). They too were very impressed by your recommendation. Thanks for opening those doors to me!

While waiting to decide with final certainty (which will happen this week), I have finally finished the big paper on frames (which I was really fed up with by the end), and returned to wavelets. The arrival of Stéphane Mallat's paper, which I thought very beautiful, led me to mulling on orthonormal wavelet bases. I wondered, too, whether a "pyramid" algorithm such as the one in Mallat's paper must necessarily be founded on a wavelet basis. I discussed this with the "vision" people here, and they seem to think that an orthogonality property for subspaces of $\ell^2(\mathbb{Z})$, which then requires the existence of an orthonormal wavelet basis underlying the "pyramid", is essential. This whole thing has led me also to the construction of orthonormal bases of wavelets with compact support. (Here am I, who had always worked with frames, surrendering to orthonormality too!) Such bases exist, but the ones I've found look a bit strange.

The idea is the following.

Let's try to construct sequences $f(n)$, $g(n)$ such that

$$\sum_k f(n-2k)f^*(\ell-2k) + g(n-2k)g^*(\ell-2k) = \delta_{n\ell}. \quad (1)$$

(In essence, that's all that's needed for an $\ell^2(\mathbb{Z})$ decomposition-and-reconstruction "pyramid" to work.)

Courant Institute of Mathematical Sciences

251 Mercer Street

New York, N.Y. 10012

Telephone: (212) 460-7100

le 22 février '87

Cher Yves,

Comment vas-tu? Il y a longtemps que je voulais t'écrire, et j'ai un peu honte d'avoir attendu si longtemps. Mais voilà enfin de mes nouvelles.

Ann Arbor nous a fait, à Robert et moi deux offres de "associate professorships" ("with tenure"). Ils m'ont dit qu'ils étaient fort impressionnés par ta lettre de recommandation, pour laquelle je voudrais encore te remercier. D'autre part, Bell Laboratories aussi m'a fait une offre (Robert y travaille déjà). Il nous faut décider avant le 1er mars (encore une semaine...). Si j'étais la seule à décider, je crois que je pencherais plutôt vers Ann Arbor: j'aime beaucoup l'endroit, et c'est une bonne université. J'y apprendrais beaucoup plus de math, aussi. D'autre part, Robert est vraiment plus attaché à Bell Labs que je ne croyais (et qu'il ne croyait lui-même d'ailleurs), et, comme je répugne de commencer notre mariage en le séparant de Bell alors qu'il s'y plaît, nous opterons probablement pour la solution Bell. Je crois d'ailleurs que je me plairai beaucoup à Bell aussi: il y a de très bons mathématiciens là aussi, et ils laissent une grande liberté à leurs chercheurs. Tu avais dit que, si nous allions à Ann Arbor, tu viendrais nous rendre visite, Robert et moi et les petits. J'espère que tu viendras aussi nous voir si nous prenons la voie Bell! Je crois que tu trouverais certains des mathématiciens intéressants (Andrew Odlyzko, Ron Graham, Larry Shepp, Jeff Lagarias, Neil Sloane, ...). Eux aussi étaient fort impressionnés par ta recommandation... Merci de m'avoir ouvert ces portes!

En attendant de décider tout à fait définitivement (ce qui sera fait cette semaine), j'ai enfin terminé le gros papier, frames (dont j'avais vraiment marre à la fin), et je me suis remis aux ondelettes. L'arrivée du papier de Stéphane Mallat, que je trouve très beau, m'a amenée à réfléchir sur les bases orthonormales d'ondelettes. Je me demandais aussi si un algorithme en "pyramide" comme dans le paper de Mallat, nécessairement devait reposer sur une base d'ondelettes. J'en ai discuté avec des "vision"-peuple ici, et ils semblent penser qu'une propriété d'orthogonalité des sous-espaces de $\ell^2(\mathbb{Z})$, qui alors impose l'existence d'une base orthonormale d'ondelettes sous-jacent la "pyramide", est essentielle. Tout cela m'a aussi amenée à la construction de bases orthonormales d'ondelettes à support compact. (Voilà que moi, qui étais toujours dans les frames, je sombre dans l'orthonormal aussi!) Elles existent, mais les exemples que j'ai trouvés ont une drôle de gueule.

L'idée est la suivante.

Essayons de construire des suites $f(n)$, $g(n)$ telles que

$$\sum_k f(n-2k)f^*(\ell-2k) + g(n-2k)g^*(\ell-2k) = \delta_{n\ell}. \quad (1)$$

(Au fond, c'est tout ce qui est nécessaire pour qu'une "pyramide" de décomposition + reconstruction de $\ell^2(\mathbb{Z})$ marche.)

We can then define $G, F : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ by

$$(Fc)_k = \sum_n f(n-2k)c_n, \quad (Gc)_k = \sum_n g(n-2k)c_n.$$

Then $F^*F + G^*G = \mathbb{1}$, and we have

$$(F^*)^N F^N + \sum_{j=1}^N F^{*N-j} G^* G F^{N-j} = \mathbb{1},$$

that is, a decomposition-and-reconstruction of $\ell^2(\mathbb{Z})$ with a pyramid algorithm. In practice, we will choose f, g to be real.

It seems reasonable (but not necessary) to limit ourselves to the case where

$$F^* \ell^2(\mathbb{Z}) \perp G^* \ell^2(\mathbb{Z})$$

(it is clear that the sum of the two spaces is ℓ^2 in all cases). This would lead (according to the intuition of the vision people) to a greater degree of data compaction than the non-orthogonal case. So we impose the condition

$$\sum_n f(n-2k) g^*(n-2\ell) = 0. \quad (2)$$

Clearly all the conditions are satisfied if the f, g are obtained starting from a wavelet basis. On the other hand, if

$$\sum_n f(n) = \sqrt{2}, \quad \sum_n g(n) = 0 \quad (3)$$

(these two conditions are equivalent if all the others hold), and if

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n f(n) e^{in\xi}$$

satisfies

$$\prod_{j=1}^{\infty} F(2^{-j}\xi) \in L^2(\mathbb{R}),$$

then we have an associated wavelet basis:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\xi) &= \prod_{j=1}^{\infty} F(2^{-j}\xi), \quad \psi(x) = \sum_k g(k) \sqrt{2} \phi(2x-k), \\ \langle \phi_{-1k}, \phi_{0n} \rangle &= f(n-2k), \\ \langle \psi_{-1k}, \phi_{0n} \rangle &= g(n-2k). \end{aligned}$$

If we insist, at the start, that the sequences $f(n), g(n)$ only have finitely many nonzero terms, the associated ψ, ϕ will have compact support (in that case F , and therefore also $\prod_{j=1}^{\infty} F(2^{-j}\xi)$, are entire and of exponential type).

So the question is to find f, g satisfying all the conditions.

On peut alors définir $G, F : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ par

$$(Fc)_k = \sum_n f(n-2k)c_n, \quad (Gc)_k = \sum_n g(n-2k)c_n,$$

Alors $F^*F + G^*G = \mathbb{1}$, et on a

$$(F^*)^N F^N + \sum_{j=1}^N F^{*N-j} G^* G F^{N-j} = \mathbb{1},$$

c.à.d. une décomposition + reconstruction avec algorithme en pyramide de $\ell^2(\mathbb{Z})$. En pratique, on choisira f, g réels.

Il paraît raisonnable (mais non pas nécessaire) de se restreindre au cas où

$$F^* \ell^2(\mathbb{Z}) \perp G^* \ell^2(\mathbb{Z})$$

(il est clair que la somme des 2 espaces est ℓ^2 dans tous les cas). Cela mènerait (d'après l'intuition des vision people) à une plus grande "data compaction" que le cas non-orthogonal. On impose donc

$$\sum_n f(n-2k) g^*(n-2l) = 0. \quad (2)$$

Toutes ces conditions sont évidemment satisfaites si les f, g sont obtenus à partir d'une base d'ondelettes. D'autre part, si

$$\sum_n f(n) = \sqrt{2}, \quad \sum_n g(n) = 0 \quad (3)$$

(ces 2 conditions sont équivalentes si on a toutes les autres), et si

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n f(n) e^{in\xi}$$

satisfait que

$$\prod_{j=1}^{\infty} F(2^{-j}\xi) \in L^2(\mathbb{R}),$$

alors on a une base d'ondelettes associées:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\xi) &= \prod_{j=1}^{\infty} F(2^{-j}\xi), \quad \psi(x) = \sum_k g(k) \sqrt{2} \phi(2x-k), \\ \langle \phi_{-1k}, \phi_{0n} \rangle &= f(n-2k), \\ \langle \psi_{-1k}, \phi_{0n} \rangle &= g(n-2k). \end{aligned}$$

Si on impose, au départ, que les suites $f(n), g(n)$ n'ont qu'un nombre fini de termes non-nuls, alors les ψ, ϕ associés auront un support compact (F , et par conséquent $\prod_{j=1}^{\infty} F(2^{-j}\xi)$, est, dans ce cas-là, entier de type exponentiel).

Il s'agit donc de trouver des f, g satisfaisant toutes les conditions.

If we set

$$\begin{aligned} f(2n) &= a(n), & g(2n) &= c(n), \\ f(2n+1) &= b(n), & g(2n+1) &= d(n), \end{aligned}$$

and define Toeplitz matrices A, B, C, D (infinite on both sides) by $A_{nk} = a(n-k), \dots$, and functions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ by $\alpha(x) = \sum_n a(n)e^{inx}, \dots$, which are entire since only finitely many $a, b, \dots$ are nonzero, then the conditions become

$$\begin{cases} A^*A + C^*C = \mathbb{1}, \\ B^*B + D^*D = \mathbb{1}, \\ A^*B + C^*D = 0 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} |\alpha(x)|^2 + |\gamma(x)|^2 = 1, \\ |\beta(x)|^2 + |\delta(x)|^2 = 1, \\ \overline{\alpha(x)}\beta(x) + \overline{\gamma(x)}\delta(x) = 0 \end{cases} \quad (1) \leftrightarrow (1')$$

$$A^*C + B^*D = 0 \quad \text{or} \quad \overline{\alpha(x)}\gamma(x) + \overline{\beta(x)}\delta(x) = 0. \quad (2) \leftrightarrow (2')$$

It follows from these last two equations (this is most easily seen on the $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ side) that

$$|\beta(x)|^2 = |\gamma(x)|^2, \quad \text{or} \quad B^*B = C^*C,$$

and hence

$$|\alpha(x)|^2 = |\delta(x)|^2, \quad \text{or} \quad A^*A = D^*D.$$

Let n_a, n_b, n_c, n_d be the widths of the diagonal bands outside which the Toeplitz matrices A, B, C, D vanish. Then, since $B^*B = C^*C$ and $A^*A = D^*D$, we have

$$n_b = n_c, \quad n_a = n_d,$$

and, if n_a, n_b, n_c, n_d are all nonzero,

$$n_a = n_c, \quad n_b = n_d.$$

(This because the width of B^*B is $2n_b - 1$, that of D^*D is $2n_d - 1$, and $B^*B + D^*D = \mathbb{1}$.) We therefore have

$$n_a = n_b = n_c = n_d.$$

Suppose there exist wavelets associated to f, g . Suppose that ϕ is symmetric about 0, as in all interesting cases up to now. Then $f(n)$ is symmetric about 0: $f(-n) = f(n)$. If there are only finitely many nonzero $f(n)$, this implies that

$$n_a \neq n_b,$$

($n_a + n_b$ is necessarily odd in this case).

It follows that there are no compactly supported orthonormal wavelet bases with ϕ symmetric about 0 and compactly supported.

In the case of the Haar basis, ψ is symmetric about $\frac{1}{2}$. Since symmetry about 0 is not possible, what about symmetry about $\frac{1}{2}$? This leads to

$$f(n+1) = f(-n)$$

or

$$C = A^* \quad (\text{let's suppose the } f \text{ are real}).$$

Si on définit

$$\begin{aligned} f(2n) &= a(n), & g(2n) &= c(n), \\ f(2n+1) &= b(n), & g(2n+1) &= d(n), \end{aligned}$$

et des matrices Toeplitz A, B, C, D (infinies des 2 côtés) par $A_{nk} = a(n-k), \dots$, et des fonctions entières (puisque un nombre fini seulement des $a, b, \dots$ est $\neq 0$) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ par $\alpha(x) = \sum a(n)e^{inx}, \dots$, alors les conditions deviennent

$$\begin{cases} A^*A + C^*C = \mathbb{1}, \\ B^*B + D^*D = \mathbb{1}, \\ A^*B + C^*D = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} |\alpha(x)|^2 + |\gamma(x)|^2 = 1, \\ |\beta(x)|^2 + |\delta(x)|^2 = 1, \\ \overline{\alpha(x)}\beta(x) + \overline{\gamma(x)}\delta(x) = 0 \end{cases} \quad (1) \leftrightarrow (1')$$

$$A^*C + B^*D = 0 \quad \text{ou} \quad \overline{\alpha(x)}\gamma(x) + \overline{\beta(x)}\delta(x) = 0. \quad (2) \leftrightarrow (2')$$

Une conséquence de ces 2 dernières éq. est (cela se voit le mieux du côté $\alpha, \beta, \gamma, \delta$)

$$|\beta(x)|^2 = |\gamma(x)|^2, \quad \text{ou} \quad B^*B = C^*C,$$

et donc

$$|\alpha(x)|^2 = |\delta(x)|^2, \quad \text{ou} \quad A^*A = D^*D.$$

Soient n_a, n_b, n_c, n_d la largeur de la bande diagonale en dehors de laquelle les matrices Toeplitz A, B, C, D sont nulles. Alors, puisque $B^*B = C^*C, A^*A = D^*D$,

$$n_b = n_c, \quad n_a = n_d,$$

et, si tous les $n_a, n_b, n_c, n_d \neq 0$,

$$n_a = n_c, \quad n_b = n_d.$$

(Ceci parce que la largeur de $B^*B = 2n_b - 1$, celle de $D^*D = 2n_d - 1$, et $B^*B + D^*D = \mathbb{1}$). On a donc

$$n_a = n_b = n_c = n_d.$$

Supposons qu'il existe des ondelettes associées aux f, g . Supposons que ϕ soit symétrique autour de 0, (comme dans tous les cas intéressants jusqu'à présent). Alors $f(n)$ est symétrique autour de 0 : $f(-n) = f(n)$. Si il y a un nombre fini de $f(n)$ nonnuls, cela implique

$$n_a \neq n_b,$$

($n_a + n_b$ est nécessairement impair dans ce cas-ci).

Il n'y a donc pas de bases orthonormales d'ondelettes à support compact avec ϕ de support compact et symétrique autour de 0.

Dans le cas de la base de Haar, ψ est symétrique autour de $\frac{1}{2}$. La symétrie autour de 0 étant exclue, qu'en est-il par la symétrie autour de $\frac{1}{2}$? Ceci mène à

$$f(n+1) = f(-n)$$

ou

$$C = A^* \quad (\text{supposons les } f \text{ réels}).$$

But then $2A^*A = \mathbb{1}$, which implies

$$n_a = 1.$$

The solution, unique up to permutations and shifts, is then

$$A = C = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbb{1}, \quad B = -D = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbb{1},$$

which corresponds to the Haar basis. There is no other compactly supported orthonormal wavelet basis associated to a compactly supported function ϕ symmetric about $\frac{1}{2}$, apart from the Haar basis.

On the other hand, if we drop the symmetry requirement, there are nontrivial examples.

For $n_a = n_b = n_c = n_d = 1$, for example, we find that, for every $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, the matrices

$$A = N^{-1}(\lambda\mu + U), \quad B = N^{-1}(\lambda - \mu U), \quad C = N^{-1}(\mu - \lambda U), \quad D = N^{-1}(1 + \lambda\mu U),$$

where $N = [(1 + \lambda^2)(1 + \mu^2)]^{1/2}$ and where U is the “shift” matrix, $U_{nk} = \delta_{n-k+1}$, satisfy equations (1') and (2').

If we also impose (3), then $\mu = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$, and

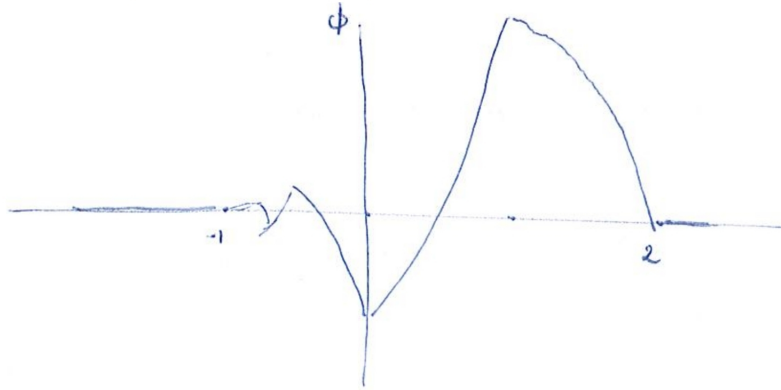
$$\hat{\phi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} [F(2^{-j}\xi)]$$

converges, and lies in $L^2(\mathbb{R})$, where

$$F(\xi) = \frac{1}{2(1 + \lambda)^2} [\lambda(\lambda - 1) + \lambda(\lambda + 1)e^{i\xi} + (\lambda + 1)e^{2i\xi} - (\lambda - 1)e^{3i\xi}].$$

The function ϕ is supported in the interval $[0, 3]$ (or in $[-1, 2]$ if we apply a “shift”). Altogether it looks kind of funny. For $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}$, $\hat{\phi}$ decreases faster than $(1 + |\xi|)^{-(1+\varepsilon)}$, and therefore ϕ is continuous.

If we draw a graph, it looks like this:



The “slopes” of ϕ have little bumps; the whole has a very fractal profile. It’s nice, isn’t it, a fractal wavelet.

If we move on to $n_a = 2$, we can find examples of “cusplless” ϕ . My conjecture now is that there exist $\phi \in C^k$ in the class $n_a = k + 1$.

Mais alors $2A^*A = \mathbb{1}$, ce qui implique

$$n_a = 1.$$

L'unique solution (à des permutations et des "shifts" près) est alors

$$A = C = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbb{1}, \quad B = -D = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbb{1},$$

ce qui correspond à la base de Haar. Il n'y a pas d'autre base orthonormale d'ondelettes à support compact associé à une fonction ϕ de support compact, autour de $\frac{1}{2}$, que la base de Haar.

Si on laisse tomber l'idée de symétrie par contre, il y a des exemples non triviaux.

Pour $n_a = n_b = n_c = n_d = 1$, par exemple, on trouve que, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, les matrices

$$A = N^{-1}(\lambda\mu + U), \quad B = N^{-1}(\lambda - \mu U), \quad C = N^{-1}(\mu - \lambda U), \quad D = N^{-1}(1 + \lambda\mu U),$$

où $N = [(1 + \lambda^2)(1 + \mu^2)]^{1/2}$, et où U est la matrice "shift", $U_{nk} = \delta_{n-k+1}$, satisfont les équations (1') et (2').

Si on impose en plus (3), alors $\mu = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$, et

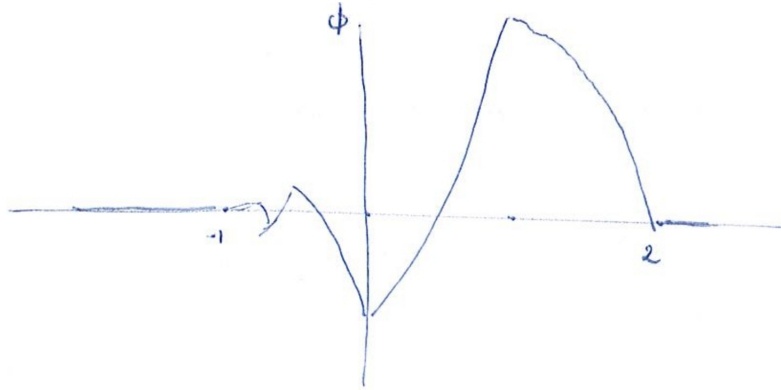
$$\hat{\phi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} [F(2^{-j}\xi)]$$

converge, et est dans $L^2(\mathbb{R})$, où

$$F(\xi) = \frac{1}{2(1 + \lambda)^2} [\lambda(\lambda - 1) + \lambda(\lambda + 1)e^{i\xi} + (\lambda + 1)e^{2i\xi} - (\lambda - 1)e^{3i\xi}].$$

La fonction ϕ a comme support l'intervalle $[0, 3]$ (ou $[-1, 2]$ si on fait un "shift"). En général elle a une drôle de gueule. Pour $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}$, $\hat{\phi}$ décroît plus vite que $(1 + |\xi|)^{-(1+\varepsilon)}$, et ϕ est donc continue.

Si on fait un graphique, on a



Les "pentes" de ϕ ont des petites bosses; le tout a une allure très fractale. C'est joli, non, l'ondelette fractale.

Si on passe à $n_a = 2$, on arrive à trouver des ϕ sans "cusps". Ma conjecture, maintenant, est qu'il existe des $\phi \in C^k$ dans la classe $n_a = k + 1$.

I had expected that the “vision people” would love a pyramid algorithm recurrence with a finite number of terms, but they’re not very fond of the asymmetry. But perhaps the construction might serve for other things...?

That’s all the news I have.

My best greetings to Anne, and to Guy David!

Ingrid

J'avais espéré que les “vision people” aimeraient une récurrence pour l'algorithme pyramidal avec un nombre fini de termes, mais ils n'aiment pas trop l'asymétrie. Mais elles pourraient peut-être servir à autre chose... ?

Voilà toutes mes nouvelles.

Un grand bonjour à Anne, et à Guy David!

Ingrid

[1987]

Courant Institute of Mathematical Sciences

251 Mercer Street

New York, N.Y. 10012

Telephone: (212) 460-7100

Feb. 24

Dear Yves,

I notice that I made an error in my calculations, and that what I wrote to you two days ago is not entirely correct. In fact, the construction that I gave in my letter does not necessarily lead to an orthonormal base, but it does lead to a tight frame (as was the case with the explicit example I gave). — Obviously it's still impossible to have an orthonormal basis, other than the Haar basis, when ϕ and ψ have compact support and ϕ is symmetric about 0 or $1/2$. — I was still dealing in frames, but this time without even noticing it.

Ingrid

Courant Institute of Mathematical Sciences

251 Mercer Street

New York, N.Y. 10012

Telephone: (212) 460-7100

Feb. 24

Cher Yves,

Je me suis aperçue que j'avais fait une erreur dans mes calculs, et que ce que je t'ai écrit il y a 2 jours n'est pas tout à fait exact. En fait, la construction que je donnais dans ma lettre ne mène pas nécessairement à une base orthonormale, mais bien à un tight frame (c'est le cas par l'exemple explicite que j'avais donné) — L'impossibilité d'avoir des bases orthonormales avec ϕ , ψ de support compact, et ϕ symétrique autour de 0 ou de $1/2$, différentes de la base de Haar, tient toujours, évidemment. — Je faisais donc encore du frame, sans m'en rendre compte, cette fois-ci!

Ingrid

Yale University
New Haven, Connecticut 06520

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
12 Hillhouse Avenue
Box 2155 Yale Station

March 12, '87

Dear Yves,

I attach a copy of what I wrote about wavelets with compact support. It is not (yet) an article: rather the sort of thing that I write for myself before writing an article, to let ideas crystallize. All the proofs are there.

I was telling you on the phone that my way of seeing wavelets with compact support was more graphical. That is also the way I came upon them. At the start, fix $f(n)$, $g(n)$. (In fact, Bob Hummel, one of the researchers on [computer] vision at NYU, gave me some articles, including one by J. Burt [P. J. Burt], which contains a decomposition and recomposition using a single filter. It is not a decomposition using wavelets, and the algorithm proposed by S[téphane] Mallat is not only nicer but also more efficient. Stéphane refers to Burt (Laplacian pyramid schemes) in his paper. Since I'd read Burt a few days before receiving Stéphane's paper, I was in just the right frame of mind to take the filters, or the discrete algorithm, as a starting point rather than as a consequence of the (beautiful!) "wavelets + multiscale" structure.) So then, fix the functions $f(n)$ and $g(n)$.

Reading Stéphane's article, I immediately realized that the discrete algorithm rests completely on

$$\sum_k [f(n-2k)f(m-2k) + g(n-2k)g(m-2k)] = \delta_{mn} \quad (4)$$

$$\text{and } \sum_k [f(n-2k)g(n-2l)] = 0. \quad (5)$$

So I asked myself if there exist $f(n)$, $g(n)$ satisfying those conditions and not necessarily coming from a wavelet basis. And in fact they do exist. One example is

$$\begin{aligned} f(0) &= \lambda\mu N^{-1}, & f(1) &= \lambda N^{-1}, & f(2) &= N^{-1}, & f(3) &= -\mu N^{-1}, \\ g(0) &= \mu N^{-1}, & g(1) &= N^{-1}, & g(2) &= -\lambda N^{-1}, & g(3) &= \lambda\mu N^{-1}, \end{aligned}$$

where $N = [(1 + \lambda^2)(1 + \mu^2)]^{1/2}$ and $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ are arbitrary.

Since we like filters with finitely many "taps", that is, with a finite number of nonzero coefficients $f(n)$, I imposed that condition from the start as well.

The folks who play with those filters also like to have a certain kind of continuity. This is how they see the matter:

Let's decompose a sequence $c = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, which we imagine as a discrete signal, with a very small "step" between consecutive impulses. The decomposition, according to Stéphane's algorithm, gives sequences

$$d_1 = Gc, \quad d_2 = GFc, \quad \dots, \quad d_N = GF^{N-1}C \quad \text{and} \quad c_N = F^N c,$$

Yale University
New Haven, Connecticut 06520

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
12 Hillhouse Avenue
Box 2155 Yale Station

le 12 mars '87

Cher Yves,

Ci-joint je t'envoie une copie de ce que j'ai rédigé sur les ondelettes à support compact. Il ne s'agit pas (encore) d'un article: c'est plutôt le genre de chose que je rédige pour moi-même avant d'écrire un article, afin de me clarifier les idées. Toutes les démonstrations y sont.

Je te disais, au téléphone, que ma façon de voir les ondelettes à support compact était plus graphique. C'est aussi la façon dont je les ai trouvées. Au départ, soient $f(n), g(n)$. (En fait, Bob Hummel, qui fait "de la vision" à NYU, m'avait passé des articles, notamment de J. Burt, où il a une décomposition + reconstruction avec 1 seul filtre. Il ne s'agit pas d'une décomposition utilisant des ondelettes, et l'algorithme proposé par S. Mallat est non seulement joli, mais aussi plus efficace. Stéphane réfère à Burt (Laplacian pyramid schemes) dans son papier. Comme j'avais lu Burt quelques jours avant de recevoir le papier de Stéphane, j'étais tout à fait dans le "frame of mind" pour prendre les filtres, ou l'algorithme discret, comme point de départ plutôt que comme conséquence de la (très belle!) structure ondelettes + multiscale.) Donc, soient $f(n), g(n)$.

En lisant l'article de Stéphane, je me suis tout de suite rendu compte que l'algorithme discret reposait complètement sur

$$\sum_k [f(n-2k)f(m-2k) + g(n-2k)g(m-2k)] = \delta_{mn} \quad (6)$$

$$\text{et } \sum_k [f(n-2k)g(n-2l)] = 0. \quad (7)$$

Et je me suis alors demandé s'il existait des $f(n), g(n)$ satisfaisant ces conditions, et qui ne seraient pas nécessairement dérivés d'une base d'ondelettes. Et, en fait, il en existe. Un exemple est

$$\begin{aligned} f(0) &= \lambda\mu N^{-1}, & f(1) &= \lambda N^{-1}, & f(2) &= N^{-1}, & f(3) &= -\mu N^{-1}, \\ g(0) &= \mu N^{-1}, & g(1) &= N^{-1}, & g(2) &= -\lambda N^{-1}, & g(3) &= \lambda\mu N^{-1}, \end{aligned}$$

où $N = [(1 + \lambda^2)(1 + \mu^2)]^{1/2}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ arbitraires.

Comme on aime les filtres avec "a finite number of taps", c.à.d avec un nombre fini de coefficients $f(n) \neq 0$, j'imposais cette condition dès le départ aussi.

Les gens que jouent avec des filtres aiment avoir une certaine continuité aussi. Leur façon de voir est la suivante.

Décomposons une séquence $c = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, que nous imaginons être un signal discret, avec un "pas", entre deux impulsions consécutives, très petit. La décomposition, selon l'algorithme de Stéphane, donne des séquences

$$d_1 = Gc, \quad d_2 = GFc, \quad \dots, \quad d_N = GF^{N-1}C \quad \text{et} \quad c_N = F^N c,$$

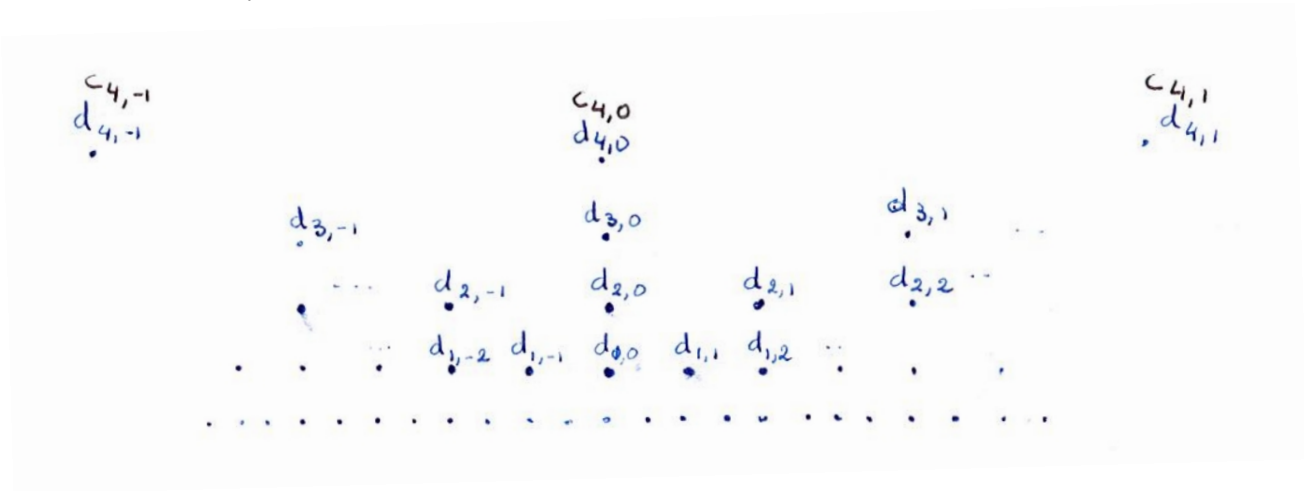
where

$$(Gc)_k = \sum_n g(n-2k)c_n, \quad (Fc)_k = \sum_n f(n-2k)c_n$$

(in Stéphane's notation), where each d_j has a "step" 2^j times larger than the initial c , and c_N has a "step" 2^N times larger.

Let's record all this in a pyramidal structure (the same drawings you use! I was very excited to find them in papers by engineers).

I'll draw the d_j in blue and the final c_N in black.



For the reconstruction, we play a sort of videogame, which at each step sets down a series of numbers in black one row above the last black row from the previous turn. (I know that all this is much more familiar to you than to me, and that you'll probably find my way of presenting it childish... But I really like this videogame image.) And the rule is, of course,

$$c_{n-1,k} = \sum_l (f(k-2l)c_{n,l} + g(k-2l)d_{n,l}).$$

What is new in Stéphane's algorithm is that he uses *two* sequences $f(n)$, $g(n)$, which of course makes all the difference, compared with previous procedures!

The "continuity" that engineers like in this kind of videogame is the following. Suppose we take as given a single black "1", at a fairly high level, and set *all* the $d_j \equiv 0$. The simplest initial conditions, if you wish. Then the reconstruction game gives me a series of increasingly detailed histograms.

For example:

$$f(-2) = f(2) = 0.1, \quad f(-1) = f(1) = 0.5, \quad f(0) = 0.8.$$

(This f does not match (6) + (7), but it is a filter that Burt uses.)

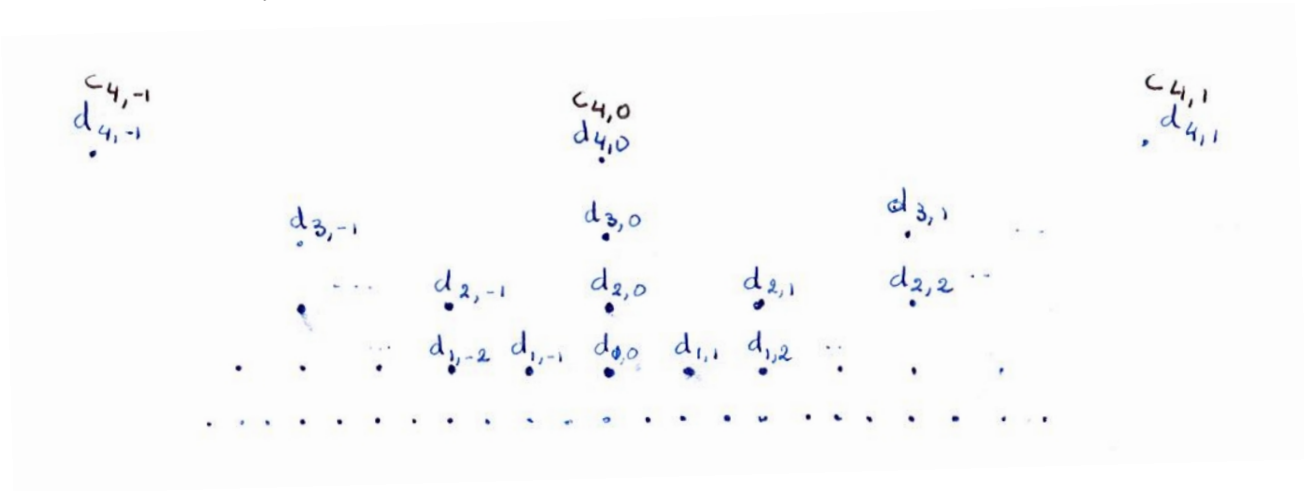
où

$$(Gc)_k = \sum_n g(n-2k)c_n, \quad (Fc)_k = \sum_n f(n-2k)c_n$$

(notations de Stéphane) où chaque d_j a un “pas” 2^j fois plus grand que le c au départ, et c_N a un “pas” 2^N fois plus grand.

Marquons ceci sur une structure pyramidale (les mêmes dessins que tu utilises! J’étais très excitée de les retrouver dans des papiers d’ingénieurs.)

Je marque les d_j en bleu, le c_N final en noir.



Pour reconstruire, on joue une espèce de billard électronique, qui à chaque pas, marque une série de nombres en noir une rangée en dessous de la dernière rangée en noir du tour précédent.

(Je sais que tout cela t’est bien plus familier qu’à moi, et que ma façon de le présenter doit te paraître enfantine... Mais j’aime bien cette image de billard électronique). Et la règle est, évidemment

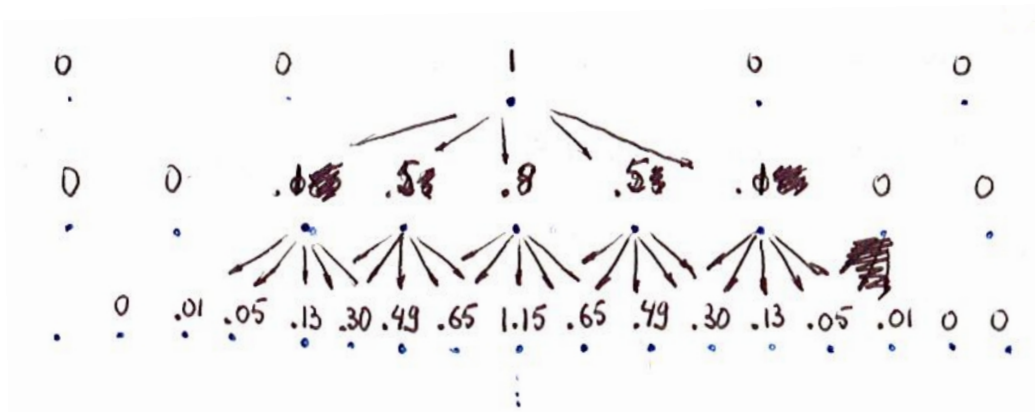
$$c_{n-1,k} = \sum_l (f(k-2l)c_{n,l} + g(k-2l)d_{n,l}).$$

Ce qui est nouveau dans l’algorithme de Stéphane est le fait qu’il utilise *deux* sequences $f(n)$, $g(n)$, ce qui fait évidemment toute la différence, par rapport aux procédés antérieurs!

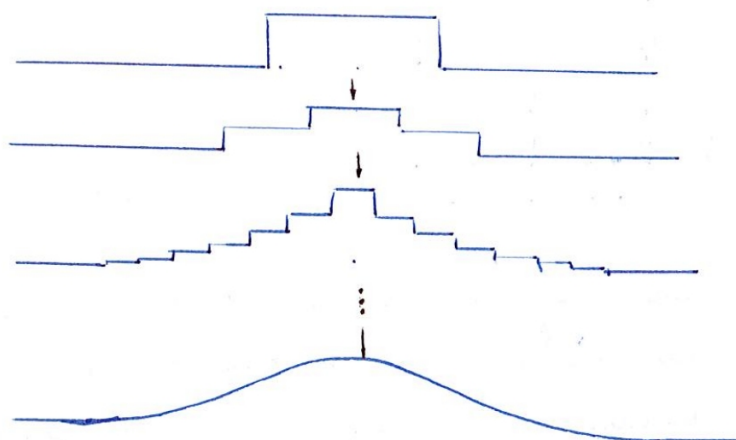
La “continuité” qu’aiment les ingénieurs dans cet espèce de billard électronique est la suivante. Supposons que nous mettions, comme données, un seul “1” en noir, à un niveau assez élevé, et *tous* les $d_j \equiv 0$. Les conditions initiales les plus simples, quoi. Alors le jeu de reconstruction va me donner une série d’histogrammes de plus en plus détaillés:

$$\text{ex. } f(-2) = f(2) = 0.1, \quad f(-1) = f(1) = 0.5, \quad f(0) = 0.8$$

(Ceci ne correspond pas à (6) + (7), mais est un filtre utilisé par Burt.)



Or, more graphically:

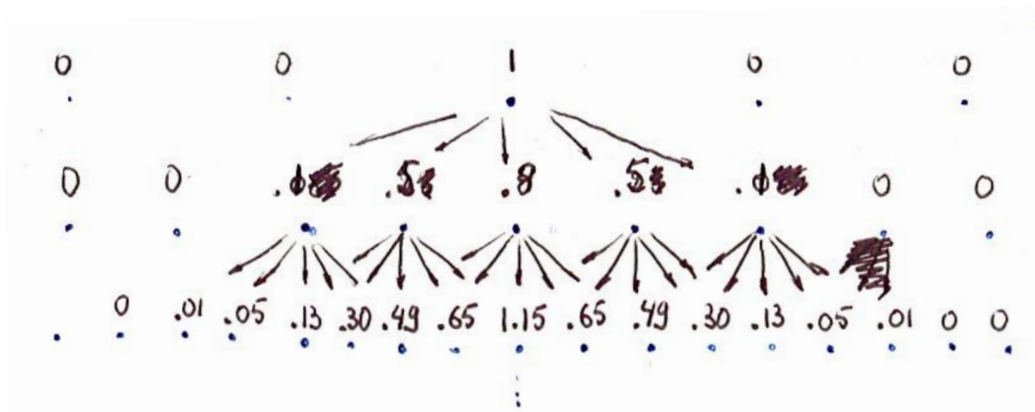


What they like is for the limit of those histograms, as the number of steps tends to infinity, to be a “reasonable” function: certainly continuous, and preferably C^1 or C^2 .

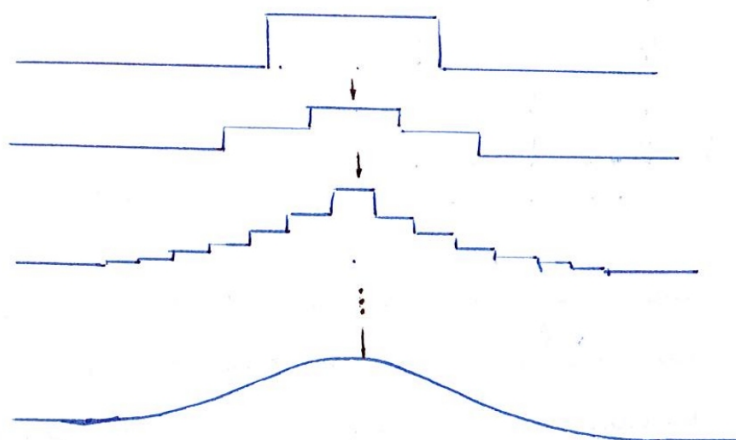
What I was looking for, then, were solutions to (6) + (7) such that repeated application of F to the sequence $(c_N)_k = \delta_{k0}$ leads to a continuous function. Or, more precisely, defining

$$(Th)(x) = \frac{2}{\sum f(n)} \sum f(n) h(2x - n),$$

I want $T^n \chi_{[-1/2, 1/2]}$ to converge to a continuous function as $n \rightarrow \infty$. And in analyzing this convergence, I of course kept running into infinite products, and I manipulated the function that you denote by m_0 (which is F in Stéphane’s paper and $\mathcal{F}$ in my notes. I’m sorry for the conflicting notation. I didn’t become aware of m_0 until the arrival of Thierry [Paul], who gave me copies of your recent articles.) By imposing certain conditions on $\mathcal{F}(\xi) = \sum_n f(n) e^{in\xi}$, which essentially amount to requiring that $\mathcal{F}$ be divisible by $(1 + e^{i\xi})^n$, I managed to prove in my notes that the $T^n \chi_{[-1/2, 1/2]}$ converge in L^2 — but one can also prove pointwise convergence — to a continuous function ϕ . The diagram immediately shows that $|\text{supp } \phi| < \infty$ if only a finite number of $f(n)$ are nonzero. This “videogame” is also an easily programmable way to obtain a graph of ϕ .



Ou, plus graphiquement:



Ce qu'ils aiment, c'est que la limite de ces histogrammes, pour un nombre de pas tendant vers l'infini, soit une fonction "décente": certainement continue, préférablement C^1 ou C^2 .

Ce que je cherchais donc, étaient des solutions de (6) + (7) telles que l'itération de F sur la séquence $(c_N)_k = \delta_{k0}$, mène vers une fonction continue. Ou, plus précisément, en définissant

$$(Th)(x) = \frac{2}{\sum f(n)} \sum f(n) h(2x - n),$$

je voulais que $T^n \chi_{[-1/2, 1/2]}$ converge, pour $n \rightarrow \infty$, vers une fonction continue. Et là, dans mon analyse de cette convergence, je tombais, évidemment, dans les produits infinis, et je manipulais la fonction que tu dénotes m_0 (qui est F dans le papier de Stéphane, et $\mathcal{F}$ dans mes notes. Excuse-moi pour divergence de notations. Je n'ai découvert m_0 qu'après l'arrivée de Thierry, qui m'a donné des copies de tes articles récents). Imposant certaines conditions sur $\mathcal{F}(\xi) = \sum_n f(n) e^{in\xi}$, qui reviennent essentiellement à imposer la divisibilité de $\mathcal{F}$ par $(1 + e^{i\xi})^n$, j'arrivais à démontrer la convergence des $T^n \chi_{[-1/2, 1/2]}$ en L^2 dans mes notes, mais on peut aussi la démontrer point par point, vers une fonction ϕ continue. Le dessin graphique montre tout de suite que $|\text{supp } \phi| < \infty$ si seulement un nombre fini de $f(n)$ sont $\neq 0$. Ce "billard" est aussi une façon fort simple de programmer pour obtenir un graphique de ϕ .

On the other hand, I realized that (6) + (7) imply

$$\sum_n f(n-2k)f(n-2l) = \delta_{kl},$$

which is to say, that passing from one row of the videogame to the next preserves orthogonality in ℓ^2 . That is, the functions $\phi(x)$ and $\phi(x-k)$, obtained from the sequences $(c)_n = \delta_{n0}$ and $(\tilde{c})_n = \delta_{nk}$, are automatically orthogonal, because c and $\tilde{c}$ are! (It was this fact, which I had already reached before but then lost sight of, that I recovered between my second and third letters: at one time I was afraid of being left only with frames, but with argument gave me back the bases that I announced to you in my first letter.)

The “frame” aspect came from the fact that

$$\sum_k c_{n-1,k}^2 = \sum_j (c_{n,j}^2 + d_{n,j}^2),$$

which is a consequence of (6) + (7).

After my first letter I’d abandoned Toeplitz matrices and switched instead to complex functions, that is,

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{\sum f(n)} (\alpha(2\xi) + e^{i\xi} \beta(2\xi)),$$

where

$$\alpha(\xi) = \sum a(n)e^{in\xi}, \quad \beta(\xi) = \sum b(n)e^{in\xi}, \quad a(n) = f(2n), \quad b(n) = f(2n+1).$$

Then (6) + (7) reduce to

$$|\alpha(\xi)|^2 + |\beta(\xi)|^2 = 1.$$

Since I’d been excited right away, while reading Stéphane’s article, by the possibility of construction other filters, not necessarily linked to wavelets (but they took their revenge!), I hadn’t paid much attention to the condition

$$|F(\xi)|^2 + |F(\xi + \pi)|^2 = 1,$$

and, after my speed reading, I even thought that this condition was associated to the symmetry of ϕ . When I met Stéphane he told me that that’s not the case, and I realized that my condition on α and β was in fact identical to this one. And of course, I read your paper afterwards, and understood to what point all of this was inevitable.

Later I constructed examples that yield functions $\phi \in C^k$, k arbitrary (§4.3 in the attached notes). Since my examples had a support that grew exponentially with k , which I did not like at all, I tried to call you to find out how yours grew. I wasn’t able to reach you, but Alex [Grossman] told me over the phone that you obtained examples by iteration (that revelation blew me away, and right after hanging up with Alex I calculated that the growth would be less), and also that a result that I had finally proved after much thinking, about square roots of certain trigonometric polynomials, could be found in Pólya and Szegő. — The next day, since I found the iterative examples so much nicer than mine, I called you to propose to write a joint article.

D'autre part, je m'étais rendu compte que (6) + (7) impliquent

$$\sum_n f(n-2k)f(n-2l) = \delta_{kl},$$

c.à.d. que le passage, dans le billard, d'un rang au suivant, préserve l'orthogonalité dans ℓ^2 . C.à.d. que les fonctions $\phi(x)$ et $\phi(x-k)$, obtenues des séquences $(c)_n = \delta_{n0}$ et $(\tilde{c})_n = \delta_{nk}$, étaient automatiquement orthogonales, puisque c et $\tilde{c}$ l'étaient! (C'est ce point-ci, que j'avais trouvé au début, mais perdu de vue après, que j'ai retrouvé entre ma 2ème et ma 3ème lettre: à un certain moment je craignais n'avoir que des frames, et cet argument-ci m'a rendu les bases que je t'annonçais dans ma 1ère lettre.)

L'aspect "frame" venait du fait que

$$\sum_k c_{n-1,k}^2 = \sum_j (c_{n,j}^2 + d_{n,j}^2),$$

qui est une conséquence de (6) + (7).

Après ma première lettre, j'avais abandonné les matrices Toeplitz, et utilisé plutôt les fonctions complexes, c.à.d.

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{\sum f(n)} (\alpha(2\xi) + e^{i\xi} \beta(2\xi)),$$

où

$$\alpha(\xi) = \sum a(n)e^{in\xi}, \quad \beta(\xi) = \sum b(n)e^{in\xi}, \quad a(n) = f(2n), \quad b(n) = f(2n+1).$$

(6) + (7) se réduisent alors à

$$|\alpha(\xi)|^2 + |\beta(\xi)|^2 = 1.$$

Comme j'avais été tout de suite enflammée, à la lecture de l'article de Stéphane, par la possibilité de construire d'autres filtres pas nécessairement liés à des ondelettes (mais elles se sont vengées!), je n'avais prêté que peu d'attention à la condition

$$|F(\xi)|^2 + |F(\xi + \pi)|^2 = 1,$$

et, après ma lecture en diagonale, je croyais même qu'elle était associée à la symétrie de ϕ . Quand j'ai rencontré Stéphane il m'a dit que ce n'était pas le cas, et je me suis rendu compte que ma condition sur α et β était en fait identique à celle-ci. Et évidemment, après j'ai lu ton paper, et j'ai compris à quel point le tout était inévitable.

Après, j'ai construit des exemples donnant des $\phi \in C^k$, k arbitraire, (§4.3 dans les notes ci-joints). Comme mes exemples avaient un support croissant exponentiellement avec k , ce que je n'aimais pas du tout, je voulais t'appeler pour savoir comment les tiennes croissaient. Je ne suis pas arrivée à te joindre, mais j'ai eu Alex au téléphone, que m'a dit que tu obtenais des exemples par itération (j'étais éblouie par cette révélation, et j'ai tout de suite, après le coup de fil à Alex, calculé que la croissance serait moins forte), et aussi qu'un résultat que j'avais finalement, d'après longue réflexion, démontré, sur les racines carrées de certains polynômes trigonométriques, se trouvait dans Pólya and Szegő. — Le lendemain, comme je trouvais les exemples par itération tellement plus jolis que les miens, je t'ai appelé pour te proposer d'écrire l'article ensemble.

I have not yet seen what you sent me at Courant, and I don't know if it will have arrived by this weekend. But, you see, I like that graphical way of visualizing things. If I understood you correctly, in the manuscript you sent me you have incorporated compactly supported wavelets into the general framework of multiscale analysis. I see how they fall into place there naturally, but I wonder if the "graphical" approach (which is not as well-suited to other wavelets, in particular the "historical" wavelet), isn't more intuitive as a way to see that compactly supported wavelets can exist. You see, I've become attached to that way of seeing things, which is the way I arrived at them.

An experience I had a few years ago might help explain this sense of attachment. Here is how it happened. When I was at Princeton, I worked with Elliott Lieb on a problem connected to the stability of matter, and we obtained a nice result. Since it was a problem that Elliott gave me, and since we had discussed it together a lot, and he had suggested some key ideas, I wrote the article, after having proved everything we wanted, and of course I put both of our names on it. Reading the article, Elliott thought that the proofs were accurate, correct, but not very nice. So he found a much nicer way of proving the same result, with better constants, and I rewrote the article with the new proofs. Those things happen, that's life, and Elliott's reaction was perfectly correct (and we've published joint papers since), but I have always felt that the second version, where the proofs, though put on paper by me, visibly bear the Lieb brand, had nothing to do with me, that it wasn't really my paper, that I had no merit in it. I still have "my" version in some drawer in Brussels. — And so I am a bit afraid that I might be in a similar situation now. Since my relationship with you is much warmer than with Elliott (and I'm very grateful for that!), I thought I'd try to explain it. At the same time, I understand that you prefer a global presentation, where all wavelets fit, and where compactly supported wavelets have their little ecological niche in the great forest of wavelets. But I have not made any contribution to that view, although of course I admire it a lot. On the other hand, I like my videogame idea... So perhaps, as you were saying, there is some point in writing separate texts. — But we will talk about all this in Paris. I hope I haven't bored you too much with these "considerations"...

See you soon! Hugs for everyone...

Ingrid

Je n'ais pas encore vu ce que tu m'as envoyé à Courant, et je ne sais pas si ce sera déjà arrivé ce week-end-ci. Mais, tu vois, je me suis attachée à cette façon graphique de voir les choses. Si je t'ai bien compris, tu as, dans le manuscrit que tu m'as envoyé, incorporé les ondelettes à support compact dans le cadre général des analyses multiscalaire. Je vois comment elles y trouvent leur place naturelle, mais je me demande si la façon "graphique" (qui m'est pas aussi bien adaptée aux autres ondelettes, notamment l'ondelette "historique") n'est pas plus intuitive pour voir comment des ondelettes à support compact pourraient exister. Tu vois, je me suis attachée à cette façon de voir, qui est la façon dont je les ai trouvées.

Il y a quelques années, une histoire m'est arrivée que explique peut-être ce sentiment d'attachement. Je vais te la raconter. Quand j'étais à Princeton, j'ai travaillé, avec Elliott Lieb, sur un problème relié à la stabilité de la matière, et nous avons obtenu un joli résultat. Comme c'était un problème qu'Elliott m'avait donné, et qu'on en avait beaucoup discuté ensemble, et qu'il m'avait suggéré quelques idées-clé, j'avais, après avoir démontré tout ce que nous voulions, rédigé l'article, avec, évidemment, nos deux noms. En lisant l'article, Elliott a trouvé que les démonstrations étaient justes, certes, mais peu jolies. Et alors, il a trouvé une façon beaucoup plus jolie de démontrer le même résultat, avec des constantes meilleures, et j'ai rerédigé l'article, avec les nouvelles démonstrations. Ce sont des choses qui arrivent, c'est la vie, et l'attitude d'Elliott était entièrement correcte (nous sommes restés co-auteurs), mais j'ai toujours eu le sentiment que la 2ème version, où les démonstrations, bien que rédigées par moi, portaient très nettement la griffe Lieb, n'avait rien à voir avec moi, et que ce n'était pas vraiment mon papier, que je n'y avais aucun mérite. J'ai encore, dans mes tiroirs à Bruxelles, "ma" version — Et j'ai un peu peur que maintenant je sois dans une situation analogue. Comme j'ai un contact beaucoup plus chaleureux avec toi (et je t'en suis très reconnaissante!) qu'avec Elliott, je peux essayer de te l'expliquer. D'une part, je comprends que tu préfères une présentation globale, où toutes les ondelettes se retrouvent, et où les ondelettes à support compact ont leur petite niche écologique dans la grande forêt des ondelettes. Mais je n'ai apporté aucune contribution à cette vue-là, bien qu'évidemment, je l'admire beaucoup. D'autre part, j'aime bien mon billard électronique... Alors, peut-être que, comme tu disais, il y a lieu de faire deux textes... Mais nous parlerons de tout ceci à Paris. — J'espère que je ne t'ennuie pas trop avec ces "délicatesses"...

A bientôt! Un grand bonjour à tout le monde...

Ingrid

AT&T Bell Laboratories
600 Mountain Avenue
Murray Hill, NJ 07974-2070
908-582-3000

Nov. 2, '87

Dear Yves,

Here finally is the tiling (which changed its name) and the compactly supported wavelets, in a more or less definitive version. I've included a reference to your paper about "Wavelets with compact support" (Zygmund lectures),⁴ because I found that reference in an article of [John J.] Benedetto, but I have no copy of that article (meaning yours). Could you please send it to me, and also your other recent articles?

Alex told me (by phone) that your mom is very ill. I'm so sorry to hear about it, and I hope with all my heart that she will recover soon.

Best regards to Anne, and see you soon, on the 14–18.

Ingrid

⁴Editor's note: The paper being referred to is YvesMeyer's 1987 Zygmund lecture at the University of Chicago, published as "Wavelets with compact support", in *Fundamental papers in wavelet theory*.

AT&T Bell Laboratories
600 Mountain Avenue
Murray Hill, NJ 07974-2070
908-582-3000

le 2 Nov. '87

Cher Yves,

Voici enfin le pavé (qui a changé de nom) et les ondel. à support compact, sous version $\pm$ définitive. J'ai mis une référence à ton papier sur les "Wavelets with compact support" (Zygmund lectures),⁵ parce que j'avais trouvé cette référence dans un article de Benedetto, mais je n'ai pas de copie de cet article (c.à.d. ton papier). Pourrais-tu me l'envoyer, s'il-te-plait, aussi que tes autres articles récents?

Alex m'a dit (au téléphone) que ta maman est très malade. Je suis désolée de l'apprendre et j'espère de tout coeur qu'elle se remettra bientôt.

Un grand bonjour à Anne, et à bientôt, pour 14–18.

Ingrid

⁵Note de l'éditeur: L'article dont il s'agit est la conférence présentée par Meyer en 1987 (Zygmund lecture, University of Chicago) qui a été publiée sous le titre "Wavelets with compact support," paru dans *Fundamental papers in wavelet theory*.

AT&T Bell Laboratories
600 Mountain Avenue
Murray Hill, NJ 07974-2070
908-582-3000

December 1, 1987

Dear Yves,

Your letter was waiting for me when I came back from a week in Canada (where I also saw [Guy] Battle, who asked me to send his greetings). I am sorry to hear that your mother has passed away. Although I'm lucky to still have both my parents, I can well imagine that losing one's mother is a great trauma. It is difficult to find words of comfort, but please let me express my deepest sympathy.

I've received an invitation for December 9 and 10 at the École Polytechnique—thank you for it! Unfortunately, I won't be able to come. Thank you also for the invitation to your place in Paris. We will not go through Paris on our way to Marseille; after 14–18 we will go back up to Belgium, to see my parents, by way of Aveyron (which is not to be missed based on the very tempting description that Thierry gave us).

[The rest of the letter is lost.]

AT&T Bell Laboratories
600 Mountain Avenue
Murray Hill, NJ 07974-2070
908-582-3000

le 1er decembre 1987

Cher Yves,

Ta lettre m'attendait à mon retour d'une semaine au Canada (où j'ai aussi vu Battle, qui m'a demandé de te dire bonjour de sa part). Je suis peinée pour toi d'apprendre que ta mère est décédée. Bienque j'aie la chance d'avoir encore mes deux parents, je m'imagine vivement que ce doit être un grand choc de perdre sa mère. Il est difficile de trouver des mots pour te consoler, mais je voudrais t'exprimer toute ma sympathie.

J'ai reçu une invitation pour les 9–10 décembre à l'Ecole Polytechnique, et je t'en remercie! Malheureusement, je ne pourrai pas venir. Merci beaucoup aussi pour ton invitation chez vous, à Paris. Nous ne passerons pas par Paris pour aller à Marseille; après 14–18 nous remontons vers la Belgique, pour voir mes parents, après un passage en Aveyron (dont Thierry nous a donné une trop alléchante description pour ne pas y aller).

[Le reste de la lettre est perdu.]

The University of Michigan
Department of Mathematics
Ann Arbor, Michigan 48109-1003
Tel.: (313) 764-0335
Fax: (313) 763-0937

January 15, '90

Dear Yves,

Many thanks for the copies of the first volume of your book! I will draw on it for wisdom to impart my students, if I may.

The article "variations on a theme", a copy of which I gave Albert Cohen, has been recast, and is now being retyped by my secretary at Bell Labs. Once I have new versions, I will send them to you. New versions in the plural, because the article has put forth a bud: I'd gotten one of the ideas in it from Albert, and I took it and made it into a short separate article to be signed by both of us. It was only after writing the earlier article that I remembered a conversation I had with Albert in San Francisco, containing the germ of that section. So I have not released the article (that's why I haven't sent you a copy), except to Albert and to Raphy [Ronald Coifman], who wanted a reference for the coiflets, and of course I have not submitted it to any journal. When Albert came to visit, we decided I'd remove that section and make it into a separate article, and only then would we decide what to do with it. That said, all that stuff is but a special case of wave packets (and that too will be explicitly said), which means that the short article might not be published at all. Anyway, I'll send you all that in a week or two, and you'll be able to tell me all that's wrong with it.

My best wishes, for 1990!
Ingrid

P.S. And BIG KISSES (4 as usual) to Thierry!

The University of Michigan
Department of Mathematics
Ann Arbor, Michigan 48109-1003
Tel.: (313) 764-0335
Fax: (313) 763-0937

le 15 janvier '90

Cher Yves,

Merci beaucoup pour les copies du 1er tome de ton livre! Je vais y puiser de la sagesse à communiquer à mes étudiants, si tu le permets.

L'article "variations sur un thème", dont j'avais donné une copie à Albert Cohen, a été remanié, et est en train d'être retapé par ma secrétaire à Bell. Dès que j'aurai les nouvelles versions, je te les enverrai. Nouvelles versions avec s, parce qu'il a bourgeonné: en fait, une des idées m'avait été communiquée par Albert, et je l'ai enlevée et incorporée dans un petit article à part qui portera nos 2 noms. Ce n'est qu'après la rédaction que je me suis souvenue d'une conversation que j'avais eu à San Francisco avec Albert, qui contenait le germe de cette section de l'article. Du coup, je n'ai pas distribué l'article (voilà pourquoi je ne t'ai pas envoyé de copie plus tôt), sauf à Albert et à Raphy, qui voulait une référence pour les coiffettes, et je ne l'ai évidemment soumis à aucun journal. Lors de la visite d'Albert, nous avons décidé que j'enlèverais cette section, que j'en ferais un petit article à part, et que nous déciderions à ce moment-là ce que nous en ferions. Ceci dit, tout cela n'est qu'un cas spécial des paquets d'onde (et cela aussi sera dit explicitement), ce qui fait que ce petit article ne sera peut-être pas publié du tout. Enfin, je t'enverrai tout cela dans une bonne semaine, et tu pourras me dire tout le mal que tu en penses.

Tous mes meilleurs vœux pour 1990!

Ingrid

P.S. Et GROSSES BISES (4, comme d'habitude) à Thierry!

[1990]

The University of Michigan
Department of Mathematics
Ann Arbor, Michigan 48109-1003
Tel.: (313) 764-0335
Fax: (313) 763-0937

Ann Arbor, January 29

Dear Yves,

Here, as promised, are the two papers you requested copies of. They're hot out of the oven and still have a few little typos (I hope there aren't more). There is nothing deep in them, I'm afraid.

I just heard that you and Raphy [Ronald Coifman] were both invited as "invited speakers" to the Great Congress in Japan! That's wonderful! I'm happy for you.

We are more or less installed in Ann Arbor, and Robert and I are both teaching. That takes more time than we had budgeted for... Moreover, all those folks who take me for a real mathematician scare the hell out of me — sooner or later they'll realize it's not true! Alberto Grünbaum, chairman at Berkeley, has invited us to California in March. He says he wants to make us an offer. There again, I wonder if they really know what they are talking about. Anyway, we shall see.

Thanks again for sending me the first volume of your book! I've told myself that I should cram from it every day (10 pages a day) and that that would help me become a real professional. What I have already read is wonderful.

Ingrid

The University of Michigan
Department of Mathematics
Ann Arbor, Michigan 48109-1003
Tel.: (313) 764-0335
Fax: (313) 763-0937

Ann Arbor, le 29 janvier

Cher Yves,

Voici, comme promis, les 2 papiers dont tu me demandes des copies. Ils sont tout frais, et avec encore de petites erreurs typographiques (j'espère qu'il n'y en a pas d'autres). Il n'y a rien de bien profond, je crains.

Je viens d'apprendre que Raphy et toi avec été invités tous les 2 comme "invited speakers" au Grand Congrès au Japon! C'est merveilleux! J'en suis heureuse pour vous!

Nous sommes plus ou moins installés ici à Ann Arbor, et Robert et moi enseignons tous les deux. Cela nous prend plus de temps que nous n'avions prévu... En plus, toutes ces gens que me prennent pour une vraie mathématicienne me foutent la trouille: tôt ou tard ils verront bien que ce n'est pas vrai! — Alberto Grünbaum, qui est chairman à Berkeley, nous a invité en California en mars. Il dit qu'il veut nous faire une offre. Là aussi, je me demande si ils se rendent bien compte de ce qu'ils disent. Enfin, nous verrons bien.

Merci encore pour l'envoi du premier tome to ton livre! Je me suis dit que je devrais y potasser tous les jours (10 pages par jour) et que cela m'aiderait à devenir une vraie professionnelle. Ce que j'en ai déjà lu est merveilleux.

Ingrid

The University of Michigan
Department of Mathematics
Ann Arbor, Michigan 48109-1003
Tel.: (313) 764-0335
Fax: (313) 763-0937

April 12, '90

Dear Yves,

I've been promising myself to write to you for a while...and I've finally found the time to do it! — Many thanks for all the things you've sent me these last few months. I absolutely love your book, and have used portions of it in the last part of my course (in particular Section III.11, "A comparison of Fourier and wavelets", and the characterization of $L^p(\mathbb{R})$ spaces, §VI.2). But I fear that engineering students in the US will find it too mathematical for their liking... — Thanks also for sending your paper on wavelet bases on $[0, 1]$. That, too, I've explained to my class, since it's such a beautiful idea — I hope you won't hold this against me! The result hasn't been published yet, but I thought it a pity not to tell them about such a lovely construction.

Robert and I went to Berkeley a month ago, to give talks and be interviewed. Many thanks for writing such a glowing letter of recommendation! I haven't seen it, of course, but Alberto Grünbaum, their chairman, told me it made quite an impression. You asked me in one of your notes whether I'd like a job at Berkeley... The answer is "yes". I love the place and have the feeling I could learn a whole lot there. Our problem is that from Robert's point of view, Berkeley is not very attractive: there is no one in combinatorics in the math department there and no one in coding theory in the electrical engineering department, and those are the two fields he works in. For him, Ann Arbor, which seems about to repeat its offer of 3 years ago, would be much better. On the other hand he hesitates (and I too, but less) to leave Bell, where there is a lot less red tape, but where I think the freedom we now have (of choosing our research topics) will not last... Robert doesn't fully share that fear, which means this has been a subject of daily discussion! Fortunately no arguments... We've promised Berkeley and Ann Arbor to decide this summer.

My teaching obligations are almost finished here: two more weeks of classes. I loved teaching this course, but it took up much more time than I expected. But it also motivated me to fully understand the finer points of Beylkin–Coifman–Rokhlin (and so also of theorem $T(1)$) and other proofs à la Calderón–Zygmund, which is a good thing (I should have started on it sooner!). On the other hand I'd hoped to learn some stuff in numerical analysis and PDEs during my stay here, and I've just barely made a start in that direction. I have May and June left to pick people's brains here and to find a nice, juicy application for wavelets (which is what I most want: I'm getting tired of lecturing about this splendid tool that doesn't have actual applications — although BCR [Beylkin–Coifman–Rokhlin] is an application, and a beautiful one, there should be others!).

The University of Michigan
Department of Mathematics
Ann Arbor, Michigan 48109-1003
Tel.: (313) 764-0335
Fax: (313) 763-0937

le 12 avril '90

Cher Yves,

Voilà longtemps que je me promets de t'écrire...et je trouve enfin le temps de le faire! — Merci beaucoup pour toutes les choses que tu m'as envoyées ces derniers mois. J'aime énormément ton livre, et j'en ai utilisé des sections dans la dernière partie de mon cours (en particulier la section III.ii, "la confrontation Fourier-ondelettes", et la caractérisation des $L^p(\mathbb{R})$, §VI.2). Je crois toutefois que les étudiants ingénieurs aux E-U ne le trouvent trop mathématique à leur goût... — Merci aussi pour l'envoi de ton papier sur les bases d'ondelettes sur $[0, 1]$. Là aussi j'ai expliqué l'idée, que je trouve très belle, à ma classe — j'espère que tu ne m'en veux pas! Le résultat n'est pas encore publié, mais je trouvais dommage de ne pas leur parler de cette construction si jolie.

Robert et moi sommes allés à Berkeley il y a un mois, pour donner des exposés et être "interviewés". Merci beaucoup d'avoir écrit une si belle lettre de recommandation! Je ne l'ai pas vue, évidemment, mais Alberto Grünbaum, leur chairman, m'a dit qu'elle avait fait un grand effet. Tu me demandais dans une de tes notes si je désirais avoir une position à Berkeley... La réponse est "oui". J'aime beaucoup l'endroit et j'ai l'impression que je pourrais y apprendre beaucoup. Le problème pour nous est que du point de vue de Robert, Berkeley n'est pas très attirant: il n'y a personne en "combinatorics" dans le département de math, et personne en "coding theory" dans le département d'electrical engineering, qui sont les deux domaines dans lesquels il travaille. Pour lui, Ann Arbor, qui veut répéter son offre d'il y a 3 ans, serait beaucoup mieux. D'autre part il hésite (moi un peu moins) à quitter Bell où la vie bureaucratique est tellement plus facile, mais où je crains que la liberté (de choisir notre sujet de recherche) dont nous jouissons actuellement ne durera pas... Robert ne partage pas toutes mes craintes à ce sujet, ce qui fait que nous discutons ferme presque tous les jours! Heureusement sans nous disputer... Nous avons promis à Berkeley et à Ann Arbor de décider cet été.

Ma charge d'enseignement est presque terminée ici: encore 2 semaines de cours. J'ai aimé donner ce cours, mais il m'a pris beaucoup plus de temps que je ne prévoyais. Mais il m'a aussi incité à vraiment comprendre tous les détails de Beylkin–Coifman–Rokhlin (et donc du théorème $T(1)$) et d'autres démonstrations Calderón–Zygmundesques, ce qui est une bonne chose (et à laquelle j'aurais dû me mettre plus tôt!). D'autre part j'avais espéré apprendre des choses en analyse numérique et en PDE pendant mon séjour ici, et je n'ai fait que quelques petits pas dans ces directions-là. Il me reste mai et juin pour profiter des connaissances des gens ici, et pour trouver une belle application juteuse pour les ondelettes (ce qui est ce que je voudrais le plus: je commence à en avoir assez de donner un exposé sur cet outil magnifique sans une véritable application — bienque BCR [Beylkin–Coifman–Rokhlin] en soit une, et très belle, il en faudrait d'autres!).

- Two-dimensional setups, with

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(A^j x - k) \quad k \in \mathbb{Z}^2, j \in \mathbb{Z},$$

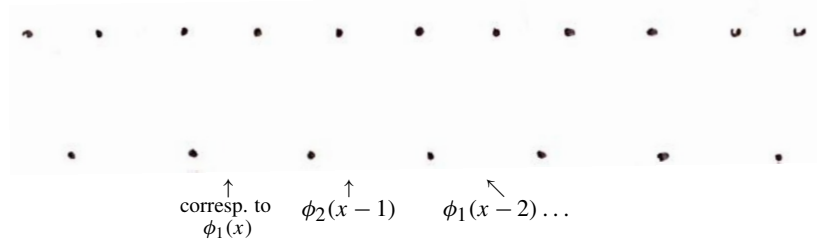
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

can never have $\psi \in C^1$ (because

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} m_0(\xi_1, \xi_2)|_{\xi_1=\pi=\xi_2} = 0 = \frac{\partial}{\partial \xi_2} m_0(\xi_1, \xi_2)|_{\xi_1=\pi=\xi_2}$$

leads to $m_0(\xi_1, \xi_2) = (1 + e^{i\xi_1})(1 + e^{i\xi_2})\mathcal{F}(\xi_1, \xi_2)$, which makes $|m_0(\xi_1, \xi_2)|^2 + |m_0(\xi_1 + \pi, \xi_2 + \pi)|^2 = 1$ impossible).

- For noninteger but rational α , the right generalization of multiresolution analysis (I think) should use several ϕ (and not just one). E.g., for $\alpha = \frac{3}{2}$, it is not possible to construct a compactly supported multiresolution analysis by taking only one ϕ (in fact it can be shown that $\hat{\phi}$ must have an interval not contained in its support), but they exist if one chooses two ϕ s (each having integral 1), corresponding to the 2 different kinds of points in the pyramid:



We then have

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(\frac{3}{2}\xi) \\ \hat{\phi}_2(\frac{3}{2}\xi) \end{pmatrix} = M(\xi) \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(\xi) \\ \hat{\phi}_2(\xi) \end{pmatrix}$$

where M is a 2×2 matrix, periodic of period 2π (2 of the entries being periodic and the other 2 antiperiodic of period π) and such that $M(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, which is idempotent.

I have no idea how to impose regularity.

- I have a method for finding symmetric biorthogonal bases close to orthonormal bases. Its point of departure is the Battle–Lemarié wavelets, and it truncates m_0 to yield compact support. I'm now adding it to my article with A[lbert] Cohen and J. C. Feauveau (still not finished, to my great embarrassment! But it's at the top of my agenda now that the teaching is under control), and I'll send you and Albert details later.

That's it for this letter!

My best to everyone,
Ingrid

- Les schèmes en 2 dimensions, avec

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(A^j x - k) \quad k \in \mathbb{Z}^2, j \in \mathbb{Z},$$

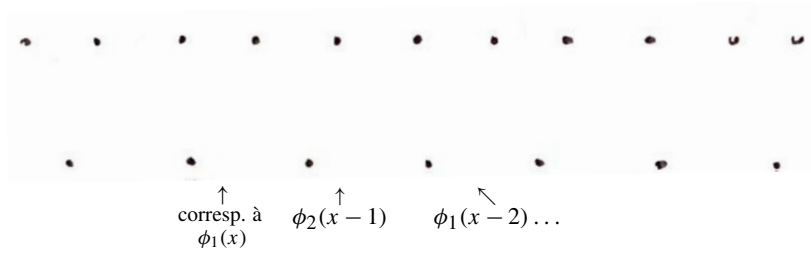
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ne peuvent jamais avoir de $\psi \in C^1$ (parce que

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} m_0(\xi_1, \xi_2)|_{\xi_1=\pi=\xi_2} = 0 = \frac{\partial}{\partial \xi_2} m_0(\xi_1, \xi_2)|_{\xi_1=\pi=\xi_2}$$

mène à $m_0(\xi_1, \xi_2) = (1 + e^{i\xi_1})(1 + e^{i\xi_2})\mathcal{F}(\xi_1, \xi_2)$, ce qui rend $|m_0(\xi_1, \xi_2)|^2 + |m_0(\xi_1 + \pi, \xi_2 + \pi)|^2 = 1$ impossible).

- Pour des α rationnels non-entiers, la bonne généralisation (d'après moi) des analyses multirésolution devrait utiliser plusieurs ϕ (et non un seul). Par ex. pour $\alpha = 3/2$, on n'arrive pas à construire d'analyse multirésolution à support compact si on ne prend qu'un seul ϕ (en fait on peut démontrer que $\hat{\phi}$ doit avoir un intervalle non contenu dans son support), mais il en existe si on choisit deux ϕ (chacun d'intégrale 1), correspondant aux 2 différentes sortes de points dans la pyramide:



Il vient alors que

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(\frac{3}{2}\xi) \\ \hat{\phi}_2(\frac{3}{2}\xi) \end{pmatrix} = M(\xi) \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(\xi) \\ \hat{\phi}_2(\xi) \end{pmatrix}$$

où M est une matrice 2×2 , 2π -périodique, (2 de ces éléments sont π -périodiques, 2 autres π -antipériodiques) et $M(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est idempotent.

Je n'ai pas la moindre idée de comment imposer de la régularité.

- J'ai une méthode pour trouver des bases biorthogonales symétriques, proches de bases orthonormales. Elle utilise comme point de départ les ondelettes de Battle-Lemarié, et tronque m_0 pour avoir des supports compacts. Je suis en train de l'incorporer à l'article avec A. Cohen et J. C. Feauveau (toujours pas entièrement rédigé, à ma grande honte! Mais c'est le 1er point sur mon agenda maintenant que le cours est sous contrôle), et je t'enverrai, ainsi qu'à Albert, des détails plus tard.

Voilà tout pour cette lettre!

Un grand bonjour à tous,

Ingrid

December 7, 1990

Dear Yves,

I'm taking advantage of Albert [Cohen]'s lightning visit to have this note conveyed to you. All is well here; Albert and I are working nonstop (even as I should be writing my notes on Lowell!), but he can explain better what we have done in person, and in more detail, so I won't do that here.

My pregnancy is going well; I get tired easily, but fortunately it's only physical effort that tires me out; mathwise, everything is going as usual for me (which means, however, more slowly than I would like!)

Robert and I have finally decided not to accept the offers from Michigan and Berkeley. We wavered for a very long time, but Robert really is much happier here than he would be at those other places. Besides, it's almost impossible to sell a house here without taking a big hit, which means that if we sell now we'd probably have to live in an apartment for a few years before trying again to buy a house (the price we'd get here would not be enough to cover the mortgage). But what really decided it for us is that Robert is much more valued here. Also, Bell is starting to get more interested in wavelets, and I feel a bit more comfortable here than I did before. But I think my change of heart about Bell has a lot to do with Albert's presence; it's so nice to have someone to talk to!

Felix Browder, from Rutgers, called me some time ago to ask if I'd be interested in coming to work there as a full professor. (Raphy [Ronald Coifman] told me that Browder's interest had been sparked by how you and he tooted my horn in Japan: thank you very much!) If that offer he mentioned back then materializes, I will probably accept it. But New Jersey has budget problems, and since Rutgers is a state university, I don't know if they'll be able to make it (the offer)... At the moment, there is nothing on paper. We shall see. In any case, many thanks for your help!

Hugs and pecks on the cheeks,
Ingrid

le 7 décembre 1990

Cher Yves,

Je profite du voyage éclair d'Albert pour lui faire remettre ce petit message. Tout va bien ici; Albert et moi travaillons d'arrache-pied (alors que je devrais rédiger mes notes sur Lowell!), mais il pourra mieux t'expliquer de vive voix, et avec plus de détails, ce que nous avons fait, et je ne le ferai donc pas ici.

Ma grossesse va bien; je suis très vite fatiguée, mais heureusement ce ne sont pas les efforts physiques qui me fatiguent: pour les mathématiques tout marche comme d'habitude (c.à.d. quand-même moins vite que je ne voudrais!).

Robert et moi avons finalement décidé de ne pas accepter les offres du Michigan et de Berkeley. Nous avons très longtemps hésité, mais Robert est vraiment beaucoup plus heureux ici qu'il ne l'aurait été là-bas. En plus il est presque impossible de vendre une maison ici, sauf à grande perte, ce qui voudrait dire que nous devrions probablement vivre quelques années en appartement avant de recommencer à acheter une maison si nous la vendrions maintenant (le prix qu'on nous en donnerait ne serait pas suffisant pour payer l'hypothèque). Mais c'est surtout le fait que Robert est beaucoup plus apprécié ici que nous a décidés. D'autre part, Bell commence à s'intéresser de plus en plus aux ondelettes, et je me sens un peu plus confortable ici qu'avant. Mais je crois que mon changement d'humeur à l'égard de Bell a beaucoup à voir avec la présence d'Albert: c'est tellement agréable d'avoir quelqu'un avec qui discuter!

Felix Browder de Rutgers m'a appelé il y a quelque temps, pour me demander si j'étais intéressée de venir chez eux comme professeur. (Raphy m'a dit que son intérêt avait été stimulé par la propagande que toi et lui m'aviez faite au Japon: un grand merci!) Si l'offre dont il me parlait à l'époque se réalise, je l'accepterai probablement. Mais le New Jersey a des problèmes budgétaires, et comme Rutgers est une université d'état, je ne sais pas si ils pourront me la faire, cette offre... Pour le moment, je n'ai rien sur papier. On verra bien. En tout cas, je te remercie beaucoup pour ton aide!

Je t'embrasse (sur les 2 joues évidemment),
Ingrid

AT&T Bell Laboratories
600 Mountain Avenue
Murray Hill, NJ 07974-2070
908-582-3000

January 15, '91

Dear Yves,

On this fateful day I'm writing about something much more trivial than the war that's threatening to break out: here are the agreements for the book on wavelets.

How are you doing? Albert and I are both busy with writing; he's preparing a final draft of our results in 2D, and I'm working on the Lowell notes (yeah, still!). We've also been discussing the question of wavelets on the interval. — In other news, I'm getting huger by the day. On the one hand I'm eager to see this baby arrive, but on the other I have so much work that I hope she'll stay put until the due date!

With all my friendship, and our usual hugs,
Ingrid

AT&T Bell Laboratories
600 Mountain Avenue
Murray Hill, NJ 07974-2070
908-582-3000

January 15, '91

Cher Yves,

En ce jour fatidique j'écris pour une chose beaucoup plus triviale que la guerre qui menace d'éclater: voici les contrats pour le livre sur les ondelettes.

Comment vas-tu? Albert et moi travaillons tous les 2 à nos rédactions; lui pour un dernier draft sur nos résultats en 2D, moi sur les notes de Lowell (eh oui, encore!). Nous discutons aussi au sujet des ondelettes sur l'intervalle. — Autrement, je deviens de plus en plus énorme. D'une part j'ai hâte de voir ce bébé, d'autre part j'ai tant de travail que j'aimerais bien qu'elle reste où elle est jusqu'à la date prévue!

Avec toute mon amitié, et notre accolade habituelle,
Ingrid

[1992, January]

THE STATE UNIVERSITY OF NEW JERSEY
RUTGERS

Department of Mathematics at New Brunswick · Hill Center for the Mathematical Sciences · Busch Campus
New Brunswick · New Jersey 08903 · (201) 932-3097

Dear Yves,

I just came upon your new book “Ondelettes et applications [Wavelets and applications]”: packages above a certain size aren’t placed in our cubbyholes, and only today did I learn that I should also be checking another mailbox, where all big packages for last names starting in “D” are placed. That’s why I hadn’t mentioned it to you before; as soon as I saw it, opened it and read some of it, I couldn’t (and didn’t) resist the impulse to tell you how much I love this book. As always, your style is superb and of unmatched clarity, but I also very much like the historical canvas that you painted, showing that indeed there have been many rediscoveries, but for the most part they have contributed new and essential insights.

I hope that this new book will also be translated into English? I’m almost certain that the AMS would love to publish a translation, if you don’t already have something else lined up. If you’d like, I’ll take it upon myself to contact the people who run their publishing program.

Apart from all that, I’m very sorry that I missed you in Baltimore, but I understand your not wanting to leave Anne alone. I hope that the course of treatment that Albert told me about, to restore her bone strength, will succeed. We missed you, of course, but your attentiveness to Anne is to your credit, and I admire you the more for it. — Incidentally, Albert worked out very well as your substitute. There were some odd fellows in the audience, but he can tell you more about that. — I also gave an overview of the history of wavelets, and I now regret that I hadn’t read your book before.

In closing let me send you and Anne both hugs and my best wishes that 1992 will be a year of much happiness for you.

Ingrid

THE STATE UNIVERSITY OF NEW JERSEY
RUTGERS

Department of Mathematics at New Brunswick · Hill Center for the Mathematical Sciences · Busch Campus
New Brunswick · New Jersey 08903 · (201) 932-3097

Cher Yves,

Je viens de découvrir ton nouveau livre “Ondelettes et applications”: les enveloppes au-dessus d’une certaine taille ne sont pas mises dans nos petits casiers à courrier, et je n’ai appris que ce matin que je devais aussi vérifier un autre casier, où toutes les grandes enveloppes pour les noms de famille commençant par “D” se retrouvent. Ceci explique pourquoi je ne t’en avais pas encore parlé avant: dès que je l’ai vu, ouvert, et lu des parties j’ai eu l’envie irrésistible (et à laquelle je n’ai pas résisté!) de te dire combien j’aime ce livre. Comme toujours, ton style est superbe et d’une lucidité sans pareil, mais j’apprécie aussi énormément la fresque historique que tu présentes, indiquant que oui, il y a eu beaucoup de redécouvertes, mais qu’elles ont pour la plupart apporté de nouveaux points de vue essentiels.

J’espère que ce nouveau livre sera aussi traduit en anglais? Je suis à peu près certaine que l’AMS aimerait beaucoup publier une traduction, si tu n’as pas encore d’autres contacts. Si tu veux, je peux me charger de contacter les personnes en charge de leurs publications.

A part tout cela, je suis désolée de t’avoir raté à Baltimore, mais je comprends que tu préfères ne pas laisser Anne seule. J’espère que les traitements dont me parlait Albert, pour refortifier son ossature, sont efficaces. Tu nous a manqué, évidemment, mais ta sollicitude pour Anne t’honore, et je t’en apprécie encore d’avantage. — Albert t’a d’ailleurs très bien remplacé. Il y avait quelques drôles de zigues dans la session, mais il pourra t’en dire davantage. — J’ai aussi donné un exposé de l’histoire des ondelettes, et je regrette maintenant que je n’avais pas lu ton texte avant.

Je termine en t’envoyant, ainsi qu’à Anne, mes meilleurs vœux pour que 1992 soit pour vous une année avec beaucoup de bonheur, et je t’embrasse,

Ingrid

[1992, undated]

AT&T Bell Laboratories
P.O. Box 636
600 Mountain Avenue
Murray Hill, NJ 07974-0636
908-582-3000

Dear Yves,

Here are 3 copies of “Non-separable bidimensional wavelet bases” for submission to *Revista [Matemática Iberoamericana]*. I’ve still not found the original figures in the mess that is my office, but I’ve not given up hope. Should I send them directly to the *Revista*?

I also enclose 2 copies of the NYTimes article (one for Albert). There are some errors, but fortunately nobody takes newspapers seriously.

I send you much love,
Ingrid

P.S. I’m also enclosing a copy of the NYTimes for Thierry, since he asked me for it.

AT&T Bell Laboratories
P.O. Box 636
600 Mountain Avenue
Murray Hill, NJ 07974-0636
908-582-3000

Cher Yves,

Voici 3 copies de “Non-separable bidimensional wavelet bases” pour soumission à la *Revista [Matemática Iberoamericana]*. Je n’ai toujours pas retrouvé les originaux des figures dans le bordel qu’est mon bureau, mais je ne désespère pas. Dois-je les envoyer directement à la *Revista*?

J’inclus aussi 2 copies (une pour Albert) de l’article de NYTimes. Il y a quelques erreurs, mais heureusement personne ne prend les journaux au sérieux.

Je t’embrasse affectueusement,
Ingrid

P.S. J’inclus aussi une copie de NYTimes pour Thierry, qui me l’avait demandée.

[1992, undated]

AT&T Bell Laboratories
600 Mountain Avenue
Murray Hill, NJ 07974-2070
908-582-3000

Dear Yves,

You asked me what I'm up to, and what Caroline is doing...

Caroline is almost walking: she can stand up, without support, for 10 or 15 seconds, and when she has a support (our hands, or a piece of furniture) she takes little steps. She's always happy and is a real joy... except at night, when she still wakes up very often and asks for mommy.

As to the mommy, she has been considering the curious setup I'm going to describe to you.

Jim Johnston (who Albert knows well) told us long ago (a year) that he'd like to have a setup to produce wavelet packets, but where he'd be able to change midstream the base being used. When we obtained bases on the interval with an equal number of scale functions and wavelets for each resolution, we told him that we had devised something that did exactly what he wanted: you could chop it into pieces, and create optimal packets for each piece.

(In parentheses: When I learned the construction of "localized sine" bases — in connection with which, so the engineering folks tell me, I should cite not only Malvar [Henrique S. Malvar], but also Prinsen [sic; J. P. Princen] and Bradley [A. B. Bradley], who were cited in Malvar's article and had already come up with some of the ideas — I pointed it out to Johnston right away as a solution. But he prefers wavelet packets, because they allow the use of different resolutions at once. That is, if you have a low-frequency signal from t_0 to t_1 , but also little kebab bites of high frequency from t_2 to t_3 and from t_4 to t_5 , where $t_0 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 < t_1$, then with wavelets you can model the low frequencies throughout the whole window $t_0 \rightarrow t_1$, while using the little windows for the high frequencies. With a setup such as Malvar's, you'd have to cut everything into pieces, even for the low frequencies. Apparently, that's a real problem for chunks of music with multiple instruments, according to Johnston (who tried to implement Prinsen [sic] and Bradley).)

But he didn't like that reply! Even though we were cutting things in a way that did not ruin the regularity! Using an argument of Albert's, I explained to him that it's as if we were extending the function smoothly and then decomposing that extension. The reason he rejected it is this: suppose that you reconstruct the signal after round-off, or quantization, or some other process that adds noise to the coefficients. Then, from the very fact that the wavelets on the interval have an abrupt edge at the end of the interval, the reconstruction after noise will have discontinuities. Worse yet: errors in the coefficients corresponding to very low frequencies can lead to such discontinuities, which is to say, to high-frequency errors. Veeerry bad, says J.J.

So, I've thought up the following hybrid scheme:

- Suppose we want blocks of size T , with a different basis of wavelet packets on each block.

AT&T Bell Laboratories
600 Mountain Avenue
Murray Hill, NJ 07974-2070
908-582-3000

Cher Yves,

Tu me demandes ce que je fais, et ce que fait Caroline...

Caroline marche presque: elle se tient debout, sans appui, pendant 10 à 15 secondes, et quand elle a un appui (nos mains, ou un meuble), elle fait des petits pas. Elle est toujours gaie et une vraie joie... sauf la nuit, où elle se réveille encore très souvent et demande sa maman.

Quant à sa maman, elle a regardé la drôle de schéma que je vais te décrire ici.

Jim Johnston (qu'Albert connaît bien) nous avait dit depuis longtemps (un an) qu'il aimerait bien un schéma où il pourrait faire des paquets d'ondelettes, mais où il pourrait changer le choix de la base à utiliser en cours de route. Quand nous avons obtenu les bases sur l'intervalle avec nombre égal de fonctions échelle et ondelettes à chaque résolution, nous lui avons annoncé que nous avions une réponse que faisait exactement ce qu'il faisait: on pourrait découper en morceaux, et faire des paquets optimaux sur chaque morceau.

(Entre parenthèses: quand j'avais appris la construction des bases "sinus localisés" — pour lesquelles, me disent les ingénieurs, il faudrait citer non seulement Malvar, mais aussi Prinsen and Bradley, cités dans l'article de Malvar, et qui avaient déjà eu une partie des idées — je l'ai aussitôt indiquée à Johnson comme une solution. Mais il aime mieux les paquets d'ondelettes, parce qu'ils permettent d'avoir des résolutions différents en même temps. C.à.d., si tu as un signal de basse fréquence de t_0 à t_1 , mais aussi des petits chouïas de haute fréq. de t_2 à t_3 , et de t_4 à t_5 , où $t_0 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 < t_1$, alors tu peux, avec les ondelettes, utiliser toute la fenêtre $t_0 \rightarrow t_1$ pour la basse fréq., et en même temps de petites fenêtres pour les hautes fréq. Avec un schéma à la Malvar, tu découperais en morceaux, même pour les basses fréq. Apparemment, c'est un réel problème pour les morceaux de musique avec plusieurs instruments, me dit Johnston (qui a essayé d'implémenter Prinsen et Bradley.)

Mail il n'aimait pas cette réponse! Malgré le fait que nous coupions de façon à ne pas déranger la régularité! En utilisant un argument d'Albert, je lui expliquais que c'était comme si on prolongeait la fonction de manière douce et qu'on décomposait alors cette extension. La raison pour laquelle il n'en voulait pas est la suivante: supposons qu'on reconstruise après arrondi, ou quantification, ou un autre procédé qui a superposé un bruit aux coefficients. Alors, par le fait même que les ondelettes sur l'intervalle ont un bord abrupt à la fin de l'intervalle, la reconstruction, après erreurs, aura des discontinuités... Pire: des erreurs sur des coefficients correspondant à de très basses fréquences peuvent mener à ces discontinuités, c.à.d. des erreurs de haute fréquence. Trrrrès mauvais, d'après J.J.

Alors j'ai pensé au schéma hybride suivant:

- Supposons qu'on veuille des blocs de taille T , avec une base différente de paquets d'ondelettes sur chaque block.

- We start by decomposing, and applying all possible filters to, all the data between 0 and $T + \Delta T$, where ΔT is chosen so that, even at the coarsest resolution, no function has support greater than ΔT .

(I'm assuming that we have decided a priori not to go beyond a fixed number of consecutive filters.) It doesn't much matter what we do at the edge $T + \Delta T$. (In practice, I think it's best to use your wavelets on the interval for this edge, for the time being.)

- We now decide which, among all possible bases, is the optimal one. (That is, we decide about the optimal tiling for this chunk of signal. Since we are using the interval $0 \rightarrow T + \Delta T$ for that decision, whereas later on we will restrict to $0 \rightarrow T$, the decision might not in fact be optimal, but I don't know how to fix this.)

- This decision taken, we take a step back. The goal, for this chunk $0 \rightarrow T$, is to use only functions whose support have nontrivial intersection with $[0, T]$. In fact, the answer is given by your construction, but I'm going to choose not to orthonormalize at the end (for reasons I'll explain below). I want the chosen superposition to reproduce exactly the signal on $[0, T]$, and I will use only wavelet packets that are not modified at the end. Some of them will have a tail going beyond T — and those tails will be very important, but I don't want to distinguish them except for the part contained in $[0, T]$. This means I should eliminate certain packets: every time I use a splitting with m_0 and m_1 , the filters at the very end using m_1 only yield linear combinations of what's given by having m_0 at the end. (It was you who observed that the $\psi_{j,k}|_{[0,T]}$ that have less than half their support in the interior of $[0, 1]$ are in fact linear combinations of the $\phi_{j,k}|_{[0,1]}$.) More concretely:

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{N-2} a_n \phi(x-n) + Q(x)$$

$\uparrow$
support
 $[0, 2N-1]$

$\downarrow$
tail,
having support
 $[N-1, 2N-1]$

where

$$a_0 = \frac{h_{2N-1}}{h_0},$$

$$a_n = \frac{h_{2N-1-2n} - h_{2n} a_{n-1}}{h_0}.$$

A completely analogous formula holds for $m_1(\xi)$, $m_0(\xi)$. So, each time that I do a splitting at endpoint T , I transfer the $N - 1$ coefficients from the end of the m_1 band to the m_0 band (using the formula above), and I drop the $N - 1$ corresponding taps in the m_1 band.

The result is indeed a representation of f by wavelet packets, which reproduces f exactly in $[0, T]$ and where each edge packet has a tail extending beyond T of a size matching its resolution.

(Those tails are the reason why I haven't used your setup directly: if I use the coefficients resulting from orthonormalization, I'm able to write down a nice tail for ψ , but for wavelet packets incorporating several m_1 's, my tails become ever shorter, which is not the desired effect. Moreover, the procedure here is simpler down the line.)

- Commençons par décomposer, en faisant tous les filtrages possibles, toutes les données entre 0 et $T + \Delta T$, où ΔT est choisi de façon telle que, même à la résolution la plus grossière, aucune fonction n’a un support plus grand que ΔT .

(Je suppose qu’on a a priori décidé de ne pas aller au-delà d’un nombre fixe de filtrages successifs). Peu importe ce qu’on fait au bord $T + \Delta T$. (En pratique, je crois que le mieux est d’utiliser tes ondelettes sur l’intervalle pour ce bord-ci, provisoire.)

- Décidons alors quelle est, parmi toutes les bases possibles, la base optimale. (C.à.d., on décide du pavage optimal, pour ce bout de signal. Comme on utilise $0 \rightarrow T + \Delta T$ pour cette décision, alors qu’on va se restreindre à $0 \rightarrow T$ plus loin, la décision pourrait bien ne pas être tout à fait optimale, mais je ne sais pas comment y remédier.)

- Cette décision prise, retournons en arrière. Le but est de n’utiliser, pour ce morceau $0 \rightarrow T$, que des fonctions dont le support a une intersection non triviale avec $[0, T]$. En fait, la réponse est donnée par ta construction, mais je vais choisir de ne pas orthonormaliser au bout (pour des raisons que j’explique plus loin). Je veux que la superposition choisie reproduise exactement le signal sur $[0, T]$, et je n’utiliserai que des paquets d’ondelettes non modifiés au bout. Certains d’entre eux auront une queue que dépasse T — et ces queues seront très importantes mais je ne veux les distinguer que par la partie contenue dans $[0, T]$. Ceci veut dire que je devrai éliminer certains paquets: chaque fois que j’utilise un “splitting” avec m_0 et m_1 , les filtres tout au bout utilisant m_1 ne donnent que des combinaisons linéaires de ce que les m_0 au bout donnent. (C’est ton observation que les $\psi_{j,k}|_{[0,T]}$ qui ont moins de la moitié de leur support à l’intérieur de $[0, 1]$ sont en fait des combinaisons linéaires des $\phi_{j,k}|_{[0,1]}$.) Concrètement:

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{N-2} a_n \phi(x-n) + Q(x)$$

$\uparrow$
support
 $[0, 2N-1]$

$\downarrow$
queue
qui a support
 $[N-1, 2N-1]$

où

$$a_0 = \frac{h_{2N-1}}{h_0},$$

$$a_n = \frac{h_{2N-1-2n} - h_{2n} a_{n-1}}{h_0}.$$

Une formule tout à fait analogue tient pour $m_1(\xi)$, $m_0(\xi)$. Alors à chaque fois que je fais un “splitting” au bout T , je reporte les $N - 1$ coeff. du bout de la bande m_1 dans la bande m_0 (utilisant la formule ci-dessus), et je laisse tomber les $N - 1$ taps correspondants dans la bande m_1 .

Le résultat est bien une représentation de f par des paquets d’ondelettes, qui reproduit f exactement dans $[0, T]$ et où tous les paquets du bord ont des queues de la taille correspondant à leur résolution, dépassant T .

(Ces queues ont la raison pour laquelle je n’ai pas utilisé ton schéma directement: si j’utilise les coeffs. résultant d’une orthonormalisation, j’arrive à écrire une jolie queue pour ψ , mais pour des paquets d’ondelettes incorporant plusieurs m_1 , mes queues deviennent de plus en plus courtes, ce qui n’est pas l’effet désiré. En plus, ce schéma-ci est plus simple pour la suite).

- Now we move on to the next block. I start by taking the difference between $f|_{[T,\infty]}$ and the “tails” of the previous block. That is,

$$\begin{aligned}
f|_{[0,T]}(x) &= \sum_{\alpha} c_{\alpha}^0 \phi_{\alpha}(x)|_{[0,T]} \quad (\phi_{\alpha} \text{ being wavelet packets}) \\
&= \sum_{\text{inner } \alpha} c_{\alpha}^0 \phi_{\alpha}(x) + \sum_{\text{edge } \alpha} c_{\alpha}^0 \phi_{\alpha}(x)|_{[0,T]} \\
\Rightarrow f^{\text{diff}}|_{[T,\infty)}(x) &= f|_{[T,\infty)}(x) - \sum_{\text{edge } \alpha} c_{\alpha}^0 \phi_{\alpha}(x)|_{[T,\infty)}.
\end{aligned}$$

This difference $f^{\text{diff}}(x)$ equals zero at T , together with all its derivatives up to order n , if $\psi \in C^{n+\epsilon}$. Therefore, at edge T , it can be decomposed perfectly via the interval construction that you and S. Jaffard introduced some years ago, using only $\phi_{j,k}$ ’s with support contained in the interval (or the half-line, since I’m only considering one edge), and some supplementary $\psi_{j,k}$ ’s ($N - 1$ of them to be exact).

- At the other edge, $2T$, I do the same thing as before. (For simplicity, let’s suppose that $T > \Delta T$, so the tails of $[0, T]$ don’t go beyond $2T$.) That is, I first look at $[T, 2T + \Delta T]$ to decide what tiling to choose in the time-frequency domain, and I perform the decomposition suitable to the edge $2T$, redistributing the numbers for the last $N - 1$ taps of each m_1 over the corresponding m_0 .

The whole amounts to a variation on a construction where one uses “too few” scale functions at left edges and “too many” scale functions at right edges; the resulting construction, too, has as many scale functions as wavelets at each resolution. Moreover, this construction has the advantage that if noise is introduced near the edges, it won’t lead to discontinuities. So long as one uses only a fixed number J of resolution levels, the functions used in the decomposition always form a Riesz basis. If I denote the coefficients obtained by $c_{n,\alpha}$, where n is for the block $[nT, (n+1)T]$ and α is the wave packet index, I find

$$\|f\|^2 \leq 2 \sum_{n,\alpha} |c_{n,\alpha}|^2$$

(because the $\phi_{n,\alpha}$ are orthogonal for fixed n , and the $\phi_{n,\alpha}$ and $\phi_{n+k,\beta}$ have disjoint supports if $k \geq 2$).

What’s more, the effect described above of “redistributing” the coefficients at the edges leads to a bound of the type

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma} |c_{n,\alpha}|^2 &\leq C 2^J \sum_{\alpha} |\langle f|_{[nT, (n+2)T]}, \phi_{n,\alpha} \rangle|^2 \\
&\quad \uparrow \\
&\quad \text{depends on the} \\
&\quad \text{choice of } m_0, m_1 \\
\Rightarrow \sum_{n,\alpha} |c_{n,\alpha}|^2 &\leq 2 C 2^J \|f\|^2.
\end{aligned}$$

If J is large, the conditioning constant given by those bounds is really small...

- Procédons maintenant au bloc suivant. Je commence par faire la différence entre $f|_{[T,\infty]}$ et les “queues” du bloc précédent. C.à.d.

$$\begin{aligned}
f|_{[0,T]}(x) &= \sum_{\alpha} c_{\alpha}^0 \phi_{\alpha}(x)|_{[0,T]} \quad \phi_{\alpha} \text{ paquets d'ondelettes} \\
&= \sum_{\alpha \text{ intérieures}} c_{\alpha}^0 \phi_{\alpha}(x) + \sum_{\alpha \text{ bord}} c_{\alpha}^0 \phi_{\alpha}(x)|_{[0,T]} \\
\Rightarrow f^{\text{diff}}|_{[T,\infty)}(x) &= f|_{[T,\infty)}(x) - \sum_{\alpha \text{ bord}} c_{\alpha}^0 \phi_{\alpha}(x)|_{[T,\infty)}.
\end{aligned}$$

Cette différence $f^{\text{diff}}(x)$ est égale à zéro en T , ainsi que toutes des dérivées jusqu'à l'ordre n , si $\psi \in C^{n+\epsilon}$.

Au bord T , elle peut donc être décomposée à merveille avec le schéma sur l'intervalle que S. Jaffard et toi avais construit il y a quelques années, n'utilisant que les $\phi_{j,k}$ avec supports contenus dans l'intervalle (ou la demi-droite, puisque je ne regarde qu'un seul bord), et quelques $\psi_{j,k}$ supplémentaires (exactement $N - 1$).

- A l'autre bout, $2T$, je fais la même chose qu'avant. (Pour plus de simplicité, supposons $T > \Delta T$, de façon à ce que les queues de $[0, T]$ ne dépassent pas $2T$.) C.à.d. je regarde d'abord $[T, 2T + \Delta T]$ pour décider quel dallage choisir en temps-fréquence, et je fais la décomposition adaptée au bord $2T$, en redistribuant les nombres pour les derniers $N - 1$ taps de chaque m_1 sur le m_0 correspondant.

Le tout correspond à une variation sur un schéma où on utiliserait “trop peu” de fonctions échelle aux bords gauches et “trop” de fonctions échelle aux bords droits; le résultat est aussi un schéma avec autant de fonctions échelle que d'ondelettes à chaque résolution; en plus, ce schéma a l'avantage que si on injecte du bruit près des bords, il ne donnera pas lieu à des discontinuités. Aussi longtemps qu'on n'utilise qu'un nombre fixe J de niveaux de résolution, les fonctions utilisées dans la décomposition constituent toujours une base de Riesz. Si je dénote les coeffs obtenus par $c_{n,\alpha}$, n pour le bloc $[nT, (n+1)T]$, α pour l'indice du paquet d'onde, alors je trouve

$$\|f\|^2 \leq 2 \sum_{n,\alpha} |c_{n,\alpha}|^2$$

(parce que les $\phi_{n,\alpha}$ sont orthogonaux pour n fixe, et les $\phi_{n,\alpha}$ et $\phi_{n+k,\beta}$ ont des supports disjoints si $k \geq 2$).

D'autre part, l'effet de “redistribution” des coeffs aux bords, décrit plus haut, mène à une borne du type

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma} |c_{n,\alpha}|^2 &\leq C 2^J \sum_{\alpha} |\langle f|_{[nT, (n+2)T]}, \phi_{n,\alpha} \rangle|^2 \\
&\quad \uparrow \\
&\quad \text{dépendant} \\
&\quad \text{des } m_0, m_1 \text{ choisis} \\
\Rightarrow \sum_{n,\alpha} |c_{n,\alpha}|^2 &\leq 2 C 2^J \|f\|^2.
\end{aligned}$$

Si J est grand, la constante de conditionnement donnée par ces bornes est fort petite...

J. Johnston is very enthusiastic about this construction because he loves this idea of blocks that interpenetrate over a distance prescribed by the resolution at each level. We shall see what that gives in practice.

And that's what I've been up to! (Apart from teaching, and writing the article with Albert and Pierre Vial about wavelets on the interval.)

Hearty greetings to Thierry and Albert! Hugs and kisses,
Ingrid

J. Johnston est très enthousiaste pour ce schéma parce qu'il aime bien cette idée d'interpénétration des blocs sur une distance dictée par la résolution de chaque niveau. Nous allons voir maintenant ce que cela donne en pratique.

Et voilà ce que je fais! (A part enseigner, et rédiger l'article avec Albert et Pierre Vial, sur les ondelettes sur l'intervalle).

Un grand bonjour à Thierry et Albert! Je t'embrasse,
Ingrid

March 24, 2002

Dear Yves,

I'd just been typing a long email to you for over an hour when Netscape gave up the ghost and the whole message was lost. You might say there's some divine justice there — that this is my punishment for not having replied to you sooner. So here I am writing by hand (at least you'll have the accents which I still haven't figured out how to make on this keyboard that lacks them), and I'm enclosing photocopies of the articles I'm discussing.

Again, sorry I didn't reply sooner to your emails. You're right; it's a chore that's being asked of you, and I should have worked to lighten your task right away. But I had no way to know: I wasn't aware that Björn [Engquist] had put you on the list of names suggested to the Dean. (But that's not really a good excuse: Björn had asked me for 5 or 6 names, and I gave him 2 right away, saying that I'd email the others — but then I forgot.) I've also wondered why you might be unable to view a Lucent web page: maybe it's because viewing from outside the US is blocked? In any case, here is the web address that works for me:

<http://wim.sweldens.com>

(It links directly to his Lucent page.)

(Continuation 2 days later, after my phone call of March 27.) I will fax this letter to you, as agreed, and I'll also send it in hard copy, together with the articles that I discuss in the letter.

The Dean, and through him, the Committee on Appointments and Tenure, don't expect from you an in-depth analysis of all aspects of his work. In fact they have chosen (or Engquist and Dobkin have chosen for them) experts in the various fields. So if you wish you can say from the get-go that you will be discussing only certain aspects of his scientific output, leaving the rest to other experts.

From the viewpoint of Applied Math at Princeton, we have been searching for years for someone who would interest both the Dept. of Computer Science and us, but there clearly has been a mismatch. The people I put forth when I was the director, such as Rokhlin, Engquist, Bill Cook and even Adelman [sic; Leonard Adleman], from MIT, did not interest them at all, or only mildly; they were warmer on Greengard (who however did not want to leave NYU), but their counterproposals were mainly people who we regarded as much less strong, such as Eric Gross [sic], or who were working in less interesting areas (like Demmel — heavy-duty linear algebra software). Regarding Wim Sweldens, on the other hand, there is interest on both sides: the computer graphicists are very impressed by his SIGGRAPH track record, that being a conference that has as many participants (about 4,000) and as much prestige in computer graphics as the ICM in mathematics. In general, a talk at ICM is easily enough, without further ado, to secure a tenured position in a top department in this field. At the same time, there is also interest in him among our group, not only on my part (or I would never have proposed him), but also on the part of Björn Engquist and Weinan E, who have had very productive conversations with him.

le 24 mars 2002

Cher Yves,

Alors que j'étais en train depuis plus d'une heure à taper un long e-mail pour toi, mon Netscape a rendu l'âme et tout le message est perdu. Tu me diras qu'il y a une justice divine — que c'est ma punition pour ne pas t'avoir répondu plus tôt. Du coup je rédige ceci à la main (au moins tu auras les accents que je n'ai toujours pas maîtrisés sur mon clavier qui ne les a pas), et j'inclus des photocopies des articles dont je parle.

Je m'excuse encore de ne pas avoir répondu plus tôt à tes e-mails. Tu as raison: c'est une corvée que l'on te demande, et j'avais dû tout de suite te rendre la tâche la plus facile possible. Je n'avais pas pu l'anticiper: je ne savais pas que Björn t'avait mis sur la liste des noms suggérés au Dean. (Mais ce n'est pas vraiment une bonne excuse: Björn m'avait demandé 5 ou 6 noms, et je lui en avais donné 2 tout de suite, en lui disant que j'émailerai les autres...et puis j'ai oublié.) Je me suis demandée aussi pourquoi tu pourrais avoir des problèmes pour regarder une page à Lucent: il se peut que ce soit parce qu'il y aurait un blocage pour des pays autres que les E-U. En tous cas, voici l'adresse sur le réseau qui marche pour moi:

<http://wim.sweldens.com>

(Elle transfère aussitôt à sa page à Lucent.)

(Je continue 2 jours plus tard, après mon coup de fil le 27 mars.) Je te faxerai cette lettre, comme convenu, et je te l'envoierai aussi "en dur", accompagnée des articles dont je parle dans la lettre.

Le Dean, et à travers lui, le Committee on Appointments and Tenure, ne s'attendent pas à une discussion approfondie de ta part de tous les aspects de son travail. En fait, ils ont choisi des experts (ou Engquist et Dobkin ont choisi pour eux) dans les différents domaines. Tu peux donc très bien dire dès le départ que tu n'adressera que certaines facettes de sa production scientifique, laissant les autres à d'autres experts.

Du point de vue des Math. App. à Princeton, nous sommes depuis plusieurs années à la recherche de quelqu'un qui intéresserait conjointement le Dépt de Computer Sciences et nous, mais il y avait clairement un mis-match. Les personnes que j'avais proposées quand j'étais directeur, comme Rokhlin, Engquist, Bill Cook et même Adelman de MIT, ne les intéressaient pas du tout ou seulement modérément; ils étaient plus chauds pour Greengard (qui lui ne voulait pas quitter NYU), mais ils contre-proposaient surtout des gens que nous considérions comme beaucoup moins forts, comme Eric Gross [sic], ou dans des branches moins intéressantes (comme Demmel — gros programmes d'algèbre linéaire). Pour Wim Sweldens par contre, il y a de l'intérêt des deux côtés: les "graphicistes" en informatique sont très impressionnés par son palmarès à SIGGRAPH, une conférence qui a autant de participants (4,000 environ) et autant de prestige en graphics que ICM pour les mathématiciens. En général, un exposé à ICM suffit largement, et sans aucune discussion, pour obtenir la tenure dans un "top department" dans ce domaine. D'autre part, il y a aussi de l'intérêt dans notre groupe, pas seulement de ma part (sinon je ne l'aurais jamais proposé), mais aussi de la part de Björn Engquist et Weinan E, qui ont eu des discussions très productives avec lui.

What I find most interesting in Wim, and what is for me the main reason why he's attractive as a bridge between applied math and computer sciences, is that he has a very good grasp of mathematical intuition, and is interested not only in getting software and programs to work well, but also in studying the mathematical reasons for their success (like me, he believes that good software requires not only good "cooking skills" — though that plays a role too —, but also, and primarily, essentially mathematical ideas. For example: integration by Lebesgue's method yields an algorithm that is far better than Riemann's.) Therefore he's always interested in exploring the mathematical aspects of certain developments, even if that requires (on a first approach) a drastic simplification in the description, beyond what other computer scientists would consider reasonable. And in our collaboration, he often has his share of key ideas, even though more often than not the technical component falls to me.

I'm enclosing here his list of publications. I've marked a few which I will describe below. I will include copies of them in the packet that I'll send you. These articles illustrate three "themes" in my "Sweldens file" for your benefit, all within the framework of the interaction "applied math $\leftrightarrow$ algorithms".

I. *Lifting*

"Lifting" is Sweldens' name for a construction that allows the construction of longer wavelet filters starting from shorter ones. In its most primitive form, it amounts to a simple algebraic observation:

$$\begin{aligned} \text{if } m_0(\xi) \text{ and } \tilde{m}_0(\xi) \text{ satisfy} \\ m_0(\xi) \overline{\tilde{m}_0(\xi)} + m_0(\xi + \pi) \overline{\tilde{m}_0(\xi + \pi)} = 1, \end{aligned} \quad (*)$$

and if we define

$$m_0^\#(\xi) = \tilde{m}_0(\xi) + e^{-i\xi} \alpha(2\xi) \overline{m_0(\xi + \pi)},$$

where α is any trigonometric polynomial, then the pair $m_0, m_0^\#$ also satisfies (*). Several people have made this observation independently: Sweldens, Dahmen & Micchelli, Herley & Vetterli — and all in all, it's a fairly trivial one. They all observed as well that biorthogonal wavelet splines can be generated from the trivial pair $m_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tilde{m}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ in two steps: $m, \tilde{m}_0 \rightarrow m_0, m_0^\# \rightarrow m_0^b, m_0^\#$ (dual operation). The difference between Sweldens' work and the others' is the interpretation he gave (in terms of prediction and updating — see article A), which then allows several very useful generalizations and applications:

- "in-place" algorithm: for instance, in Haar:
standard alg.:

$$\begin{aligned} c_k^0 \longrightarrow s_k^1 &= \frac{c_{2k}^0 + c_{2k+1}^0}{2} \quad (\text{non-normalized}). \\ d_k^1 &= c_{2k+1}^0 - c_{2k}^0 \end{aligned}$$

One must store the c_{2k}^0, c_{2k+1}^0 in memory after calculating the s_k^1 , in order to calculate the d_k^1 .

Ce que je trouve le plus intéressant dans Wim, et ce qui constitue pour moi la raison principale pour son attrait comme un pont entre les math. app. et l'informatique, est qu'il comprend très bien l'intuition mathématique, et qu'il est intéressé non seulement par des codes ou programmes que marchent bien, mais aussi par une étude des raisons mathématiques pour leur succès (comme moi, il est persuadé qu'un bon code ne requiert pas seulement de la "cuisine" — bien qu'elle joue un rôle aussi — mais aussi, et principalement, des idées essentiellement mathématiques. Par exemple: intégrer selon la méthode de Lebesgue donne un algorithme de loin supérieur à l'algorithme de Riemann.) Par conséquent, il est toujours intéressé d'explorer l'aspect mathématique de certains développements, même s'il faut parfois, simplifier drastiquement (dans un premier à bord) la description, au-delà de ce que d'autres informaticiens trouveraient raisonnable. Et dans mes collaborations, il a souvent sa part des idées cruciales, même si le côté technique mathématique retombe plus souvent sur moi.

J'attache ici la liste de ses publications. J'en ai marqué quelques-unes que je veux décrire ci-dessous. J'inclurai leurs copies dans le paquet que je t'enverrai. Ces articles illustrent trois "thèmes" dans mon "dossier Sweldens" pour toi, tous dans le cadre interaction math app $\leftrightarrow$ algorithmes.

I. *Lifting*

"Lifting" est le nom donné par Sweldens à une construction qui permet de dériver des filtres d'ondelettes plus longs à partir d'autres, plus courts. Dans son stade le plus primitif, il s'agit d'une simple observation algébrique:

$$\begin{aligned} \text{si } m_0(\xi) \text{ et } \tilde{m}_0(\xi) \text{ satisfont} \\ m_0(\xi) \overline{\tilde{m}_0(\xi)} + m_0(\xi + \pi) \overline{\tilde{m}_0(\xi + \pi)} = 1, \end{aligned} \quad (*)$$

et on définit

$$m_0^\#(\xi) = \tilde{m}_0(\xi) + e^{-i\xi} \alpha(2\xi) \overline{m_0(\xi + \pi)},$$

où α est un polynôme trigonométrique arbitraire, alors la paire m_0 et $m_0^\#$ satisfont (*) également. Cette observation a été faite pour plusieurs personnes indépendamment: Sweldens, Dahmen & Micchelli, Herley & Vetterli — et somme toute, c'est une observation assez triviale. Ils ont tous aussi observé que les ondelettes splines biorthogonales peuvent être générées à partir de la paire triviale $m_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tilde{m}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ en 2 étapes: $m, \tilde{m}_0 \rightarrow m_0, m_0^\# \rightarrow m_0^b, m_0^\#$ (opération duale). La différence entre le travail de Sweldens et les autres est l'interprétation qu'il a donnée (en termes de prédiction et update — voir article A) qui alors permettait plusieurs généralisations et applications très utiles:

- algorithme "in-place": par ex. dans Haar:

alg. standard:

$$\begin{aligned} c_k^0 \longrightarrow s_k^1 &= \frac{c_{2k}^0 + c_{2k+1}^0}{2} \quad (\text{non normalisés}). \\ d_k^1 &= c_{2k+1}^0 - c_{2k}^0 \end{aligned}$$

Il faut garder les c_{2k}^0, c_{2k+1}^0 en mémoire après le calcul de s_k^1 , pour pouvoir calculer d_k^1 .

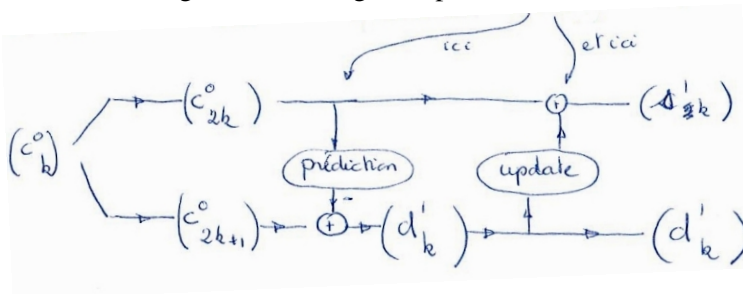
lifting alg.:

$$\begin{array}{c}
 c_k^o \swarrow \searrow \\
 c_{2k}^o \quad c_{2k+1}^o \\
 \longrightarrow c_{2k}^o \quad \longrightarrow d_k^i = c_{2k+1}^o - c_{2k}^o \\
 \longrightarrow s_k^i = c_{2k}^o + \frac{1}{2} d_k^i
 \end{array}$$

For each calculation: one quantity is replaced by another (c_{2k+1}^o by d_k^i , later s_k^i by c_{2k}^o).

This allows one to make much bigger calculations and in situations where the “prediction” and the “update” are not uniform, as in the

- application to nonuniform surfaces and triangulations (see article A: second-generation wavelets)
- in the setting of the 2 triangular operations



One can very well use nonlinear operations (utilized in B) or adaptative ones (as in C).

- finally, by introducing more than 2 steps if necessary, one can factor into triangular steps all wavelet filters of that sort (see D)—that’s the implementation that was integrated into JPEG2000 because it is so easy.

II. Irregular subdivision

This setting is an example where Sweldens (and I) have looked first at a mathematical problem to see if its solution would suggest an algorithm. With my student Igor Guskov, who joined us early on in this effort, we made a detailed study (papers E and F) in dimension 1, which then suggested to Igor the 2d (surface) construction in his thesis, and also the applications spelled out in paper G (joint with Schröder).

III. Normal meshes

Here we proceeded in the opposite direction. A beautiful idea was first implemented (with spectacular results)—see article H, and then it piqued my mathematical curiosity—see article I (a preprint, not yet on Sweldens’ web page). We are hoping that a more concerted mathematical effort will lead us to other 2d algorithms.

However, this interminable letter must come to an end if it’s to be of any use to you, so I’ll finish now, two days and two pens later, with

hugs and kisses,
Ingrid

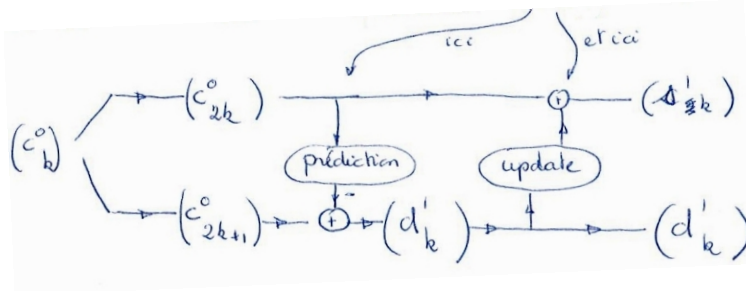
alg. lifting:

$$\begin{array}{lcl}
 c_k^0 & \begin{array}{l} \nearrow c_{2k}^0 \\ \searrow c_{2k+1}^0 \end{array} & \begin{array}{l} \longrightarrow c_{2k}^0 \longrightarrow s_k^1 = c_{2k}^0 + \frac{1}{2}d_k^1 \\ \longrightarrow d_k^1 = c_{2k+1}^0 - c_{2k}^0 \longrightarrow d_k^1 \end{array}
 \end{array}$$

À chaque calcul: une quantité est remplacée par une autre (c_{2k+1}^0 par d_k^1 , plus tard s_k^1 par c_{2k}^0).

Ceci permet de faire des calculs beaucoup plus gros et dans des cadres où la “prédiction” et le “update” ne sont pas uniformes, comme dans l’[sic]

- application à des surfaces et triangulations non-uniformes (voir article A: second-generation wavelets)
- dans le cadre des 2 opérations triangulaires



- finalement, en introduisant plus de 2 étapes si nécessaire, on peut factoriser en étapes triangulaires tous les filtres ondelettes de la sorte (voir D) — c’est cette implémentation-là qui a été intégrée à JPEG2000 parce que elle est tellement facile.

II. Subdivision irrégulière

Ce cadre-ci est un exemple où Sweldens (et moi) avons regardé d’abord un problème mathématique pour voir si sa solution suggérerait un algorithme. En 1d, nous avons fait, avec Igor Guskov, mon étudiant, qui nous a joints très vite dans cet effort, une étude détaillée (papiers E et F) qui a alors suggéré à Igor la construction en 2d (surface) dans sa thèse, et des applications détaillées dans papier G (joint avec Schröder).

III. Normal meshes

Ici, le cheminement inverse a été fait. Une idée très belle a d’abord été implémentée (avec des résultats spectaculaires) — voir article H, et a ensuite excité ma curiosité mathématique — voir article I (un preprint, pas encore sur la page web de Sweldens). Nous espérons que des travaux math. plus poussés nous amèneront à d’autres algorithmes en 2d.

Cette lettre interminable doit cependant se terminer si je veux qu’elle te soit de quelque utilité, donc je termine, 2 jours et 2 bics plus tard, avec

des grosses bises,
Ingrid

References

- [Daubechies 1985] I. Daubechies, [Letter to Y. Meyer of 3 December 1985](https://celebratio.org/media/essaypdf/354_851203.pdf), 1985, available at https://celebratio.org/media/essaypdf/354_851203.pdf. Mentioning notes on a frame construction and a manuscript of Meyer.
- [Daubechies 1986a] I. Daubechies, [Letter to Y. Meyer of 26 August 1986](https://celebratio.org/media/essaypdf/None_860826.pdf), 1986, available at https://celebratio.org/media/essaypdf/None_860826.pdf. About letters from Paul Federbush and Guy Battle.
- [Daubechies 1986b] I. Daubechies, [Letter to Y. Meyer of 29 July 1986](https://celebratio.org/media/essaypdf/None_860729.pdf), 1986, available at https://celebratio.org/media/essaypdf/None_860729.pdf. About Paul Federbush’s basis and an extension to Meyer’s basis.
- [Daubechies 1987a] I. Daubechies, [Letter to Y. Meyer of 1 December 1987](https://celebratio.org/media/essaypdf/None_871201.pdf), 1987, available at https://celebratio.org/media/essaypdf/None_871201.pdf. Condolences on the passing of Meyer’s mother and discussion of travel plans.
- [Daubechies 1987b] I. Daubechies, [Letter to Y. Meyer of 12 March 1987](https://celebratio.org/media/essaypdf/None_870312.pdf), 1987, available at https://celebratio.org/media/essaypdf/None_870312.pdf. About wavelets with compact support.
- [Daubechies 1987c] I. Daubechies, [Letter to Y. Meyer of 2 November 1987](https://celebratio.org/media/essaypdf/None_871102.pdf), 1987, available at https://celebratio.org/media/essaypdf/None_871102.pdf. Mentioning a tiling and compactly supported wavelets.
- [Daubechies 1987d] I. Daubechies, [Letter to Y. Meyer of 22 February 1987](https://celebratio.org/media/essaypdf/None_870222.pdf), 1987, available at https://celebratio.org/media/essaypdf/None_870222.pdf. About the construction of orthonormal bases of wavelets with compact support, inspired by an algorithm of Mallat.
- [Daubechies 1987e] I. Daubechies, [Letter to Y. Meyer of 24 February 1987](https://celebratio.org/media/essaypdf/None_870224.pdf), 1987, available at https://celebratio.org/media/essaypdf/None_870224.pdf.
- [Daubechies 1990a] I. Daubechies, [Letter to Y. Meyer of 12 April 1990](https://celebratio.org/media/essaypdf/None_900412.pdf), 1990, available at https://celebratio.org/media/essaypdf/None_900412.pdf. About Meyer’s book, deciding between Berkeley and Ann Arbor positions, and remarking on two-dimensional set ups, multiresolution analysis, and symmetric biorthogonal bases.
- [Daubechies 1990b] I. Daubechies, [Letter to Y. Meyer of 15 January 1990](https://celebratio.org/media/essaypdf/None_900115.pdf), 1990, available at https://celebratio.org/media/essaypdf/None_900115.pdf. About versions of papers with Albert Cohen.
- [Daubechies 1990c] I. Daubechies, [Letter to Y. Meyer of 29 January 1990](https://celebratio.org/media/essaypdf/None_900129.pdf), 1990, available at https://celebratio.org/media/essaypdf/None_900129.pdf. About settling in at Ann Arbor and thanks for a copy of Meyer’s book.
- [Daubechies 1990d] I. Daubechies, [Letter to Y. Meyer of 7 December 1990](https://celebratio.org/media/essaypdf/None_901207.pdf), 1990, available at https://celebratio.org/media/essaypdf/None_901207.pdf. About decision to stay at Bell Labs and potential position at Rutgers.
- [Daubechies 1991] I. Daubechies, [Letter to Y. Meyer of 15 January 1991](https://celebratio.org/media/essaypdf/None_910115.pdf), 1991, available at https://celebratio.org/media/essaypdf/None_910115.pdf. Brief update on current work and pregnancy.
- [Daubechies 1992a] I. Daubechies, [Letter to Y. Meyer, undated \[1992\]](https://celebratio.org/media/essaypdf/361_870000.pdf), 1992, available at https://celebratio.org/media/essaypdf/361_870000.pdf. Accompanying enclosure of copies of submitted article and a New York Times article.
- [Daubechies 1992b] I. Daubechies, [Letter to Y. Meyer, undated \[1992\]](https://celebratio.org/media/essaypdf/None_920000.pdf), 1992, available at https://celebratio.org/media/essaypdf/None_920000.pdf. About a hybrid scheme to produce wavelet packets.
- [Daubechies 1992c] I. Daubechies, [Letter to Y. Meyer, undated \[January 1992\]](https://celebratio.org/media/essaypdf/None_920100.pdf), 1992, available at https://celebratio.org/media/essaypdf/None_920100.pdf. About receipt of Meyer’s book *Ondelettes et applications* and Meyer’s wife.
- [Daubechies 2002] I. Daubechies, [Letter to Y. Meyer of 26 March 2002](https://celebratio.org/media/essaypdf/375_020326.pdf), 2002, available at https://celebratio.org/media/essaypdf/375_020326.pdf. About consideration of Wim Sweldens for position at Princeton and brief summary of his work.
- [Heil and Walnut 2006] C. Heil and D. F. Walnut (editors), *Fundamental papers in wavelet theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006. [MR](#)
- [I. Daubechies and Meyer 1986] A. G. I. Daubechies and Y. Meyer, “Painless nonorthogonal expansions”, *J. Math. Phys.* **27**:5 (1986), 1271–1283. [MR](#)

This e-book is part of a *Celebratio Mathematica* volume on the work of Ingrid Daubechies, one of a series of volumes on women mathematicians sponsored by the Mathematical Sciences Research Institute. Other volumes in the series on the *Celebratio* archive include:

JOAN BIRMAN	celebratio.org/Birman_JS
DUSA MCDUFF	celebratio.org/McDuff_D
CATHLEEN MORAWETZ	celebratio.org/Morawetz_CS
KAREN UHLENBECK	celebratio.org/Uhlenbeck_K

For information on how to donate to *Celebratio Mathematica*, visit celebratio.org

